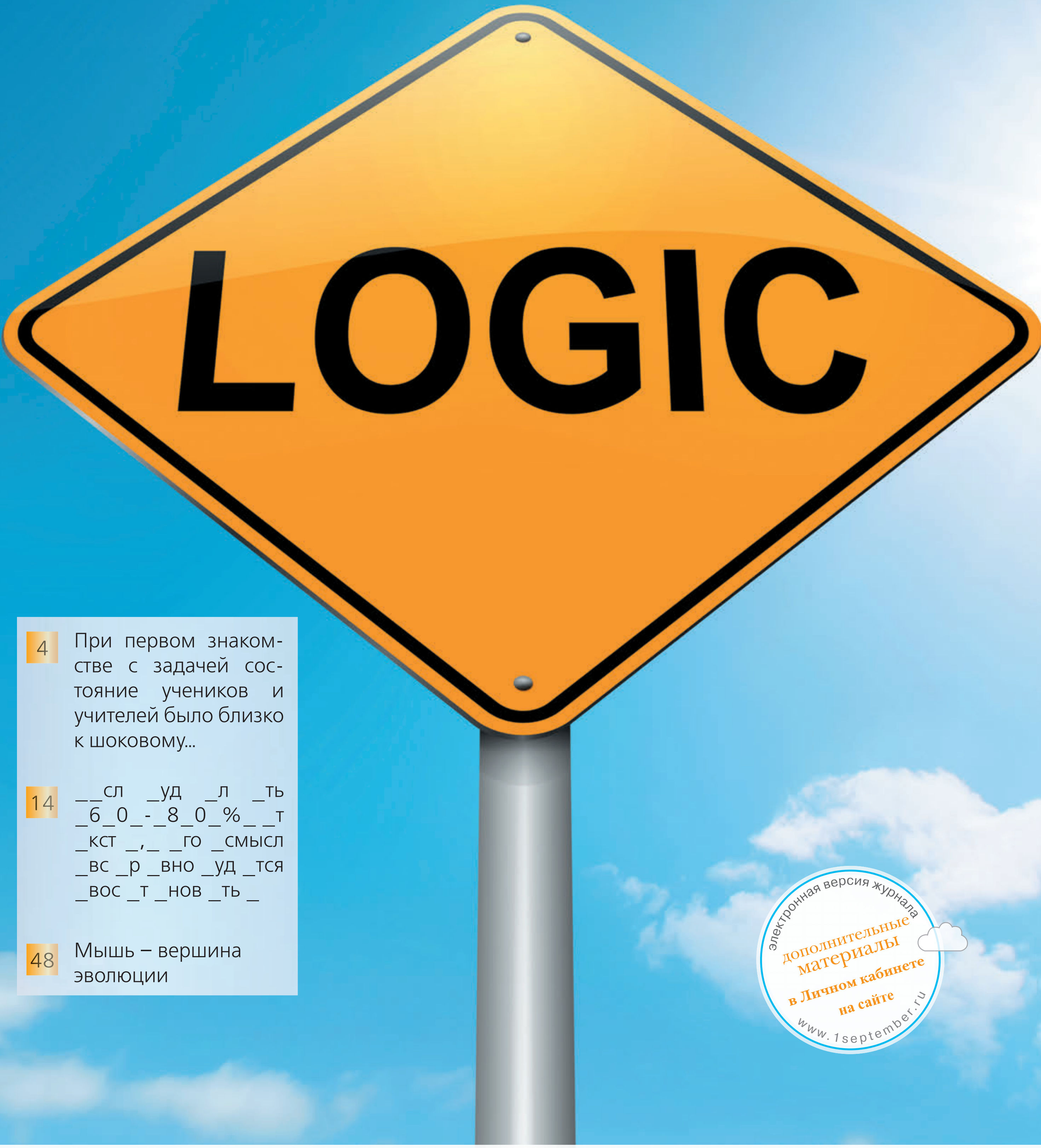
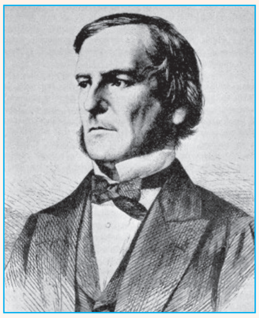
№12 Издание основано в 1995 г. inf.1september.ru
УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ ИНФОРМАТИКИ

ИНФОРМАТИКА



издательский дом 1september.ru
Первое сентября
декабрь 2014
ИНФОРМАТИКА Подписка на сайте www.1september.ru или по каталогу «Почта России»: 79066 — бумажная версия, 12684 — CD-версия

НА ОБЛОЖКЕ



Наступающий 111110111111 год — знаменательный и для нашего предмета, и для нашей науки. В следующем году исполняется 11001000 лет со дня рождения Джорджа Буля!

В НОМЕРЕ

В ЛИЧНОМ КАБИНЕТЕ

Облачные технологии от Издательского дома “Первое сентября”

Уважаемые подписчики бумажной версии журнала!

Дополнительные материалы к номеру и электронная версия журнала находятся в вашем Личном кабинете на сайте www.1september.ru.

Для доступа к материалам воспользуйтесь, пожалуйста, кодом доступа, вложенным в №7–8/2014.

Срок действия кода: с 1 июля по 31 декабря 2014 года.

Для активации кода:
- зайдите на сайт www.1september.ru;
- откройте Личный кабинет (создайте, если у вас его еще нет);
- введите код доступа и выберите свое издание.

Справки: podpiska@1september.ru или через службу поддержки на портале “Первого сентября”.

ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

Презентации и исходные файлы к статьям номера

ИНФОРМАТИКА

ПОДПИСНЫЕ ИНДЕКСЫ
по каталогу “Почта России”: 79066 — бумажная версия, 12684 — электронная версия

http://inf.1september.ru

Учебно-методический журнал для учителей информатики
Основан в 1995 г.
Выходит один раз в месяц

РЕДАКЦИЯ:
гл. редактор С.Л. Островский
редакторы
Е.В. Андреева,
Д.М. Златопольский (редактор вкладки “В мир информатики”)
Дизайн макета И.Е. Лукьянов
верстка Н.И. Пронская
корректор Е.Л. Володина
секретарь Н.П. Медведева
Фото: фотобанк Shutterstock
Журнал распространяется по подписке
Цена свободная
Тираж 27 000 экз.
Тел. редакции: (499) 249-48-96
E-mail: inf@1september.ru
http://inf.1september.ru

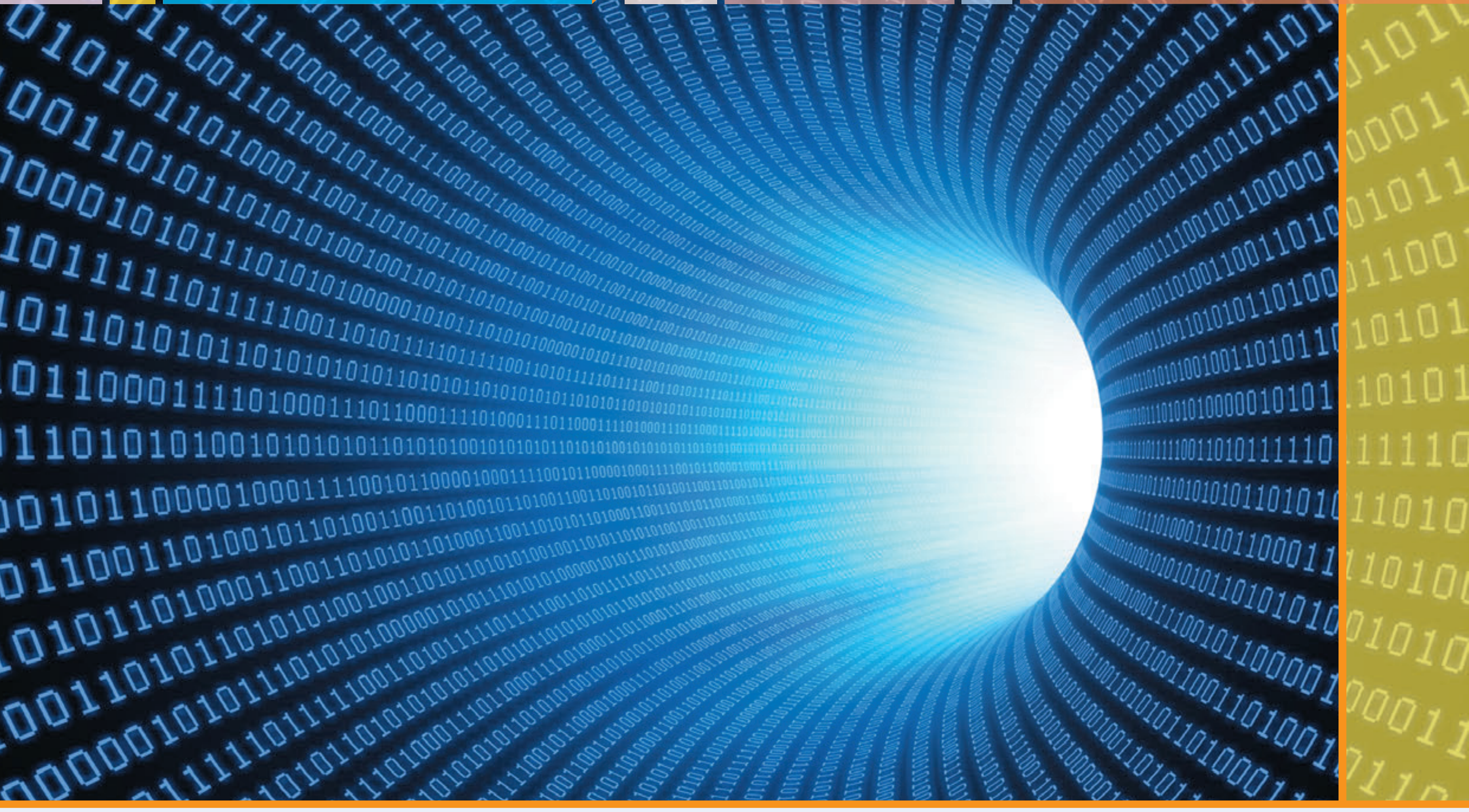
ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ “ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЬ”
Главный редактор:
Артем Соловейчик (генеральный директор)
Коммерческая деятельность:
Константин Шмарковский (финансовый директор)
Развитие, IT и координация проектов:
Сергей Островский (исполнительный директор)
Реклама, конференции и техническое обеспечение Издательского дома:
Павел Кузнецов
Производство:
Станислав Савельев
Административно-хозяйственное обеспечение:
Андрей Ушков
Педагогический университет:
Валерия Арсланьян (ректор)

ЖУРНАЛЫ ИЗДАТЕЛЬСКОГО ДОМА “ПЕРВОЕ СЕНТЯБРЬ”
Английский язык – А.Громушкина
Библиотека в школе – О.Громова
Биология – Н.Иванова
География – и.о. А.Митрофанов
Дошкольное образование – Д.Тюттерин
Здоровье детей – Н.Сёмина
Информатика – С.Островский
Искусство – О.Волкова
История – А.Савельев
Классное руководство и воспитание школьников – М.Битянова
Литература – С.Волков
Математика – Л.Рослова
Начальная школа – М.Соловейчик
Немецкий язык – М.Бузоева
ОБЖ – А.Митрофанов
Русский язык – Л.Гончар
Спорт в школе – О.Леонтьева
Технология – А.Митрофанов
Управление школой – Е.Рачевский
Физика – Н.Козлова
Французский язык – Г.Чесновицкая
Химия – О.Блохина
Школа для родителей – Л.Печатникова
Школьный психолог – М.Чибисова

УЧРЕДИТЕЛЬ:
ООО “ЧИСТЫЕ ПРУДЫ”
Зарегистрировано ПИ № ФС77-44341 от 22.03.2011
в Министерстве РФ по делам печати
Подписано в печать: по графику 15.10.2014, фактически 15.10.2014
Заказ №
Отпечатано в ОАО “Первая Образцовая типография”
Филиал “Чеховский Печатный Двор”
ул. Полиграфистов, д. 1, Московская область, г. Чехов, 142300
Сайт: www.chpd.ru
E-mail: sales@chpk.ru
Факс: 8 (495) 988-63-76

АДРЕС ИЗДАТЕЛЯ:
ул. Киевская, д. 24, Москва, 121165
Тел./факс: (499) 249-31-38
Отдел рекламы: (499) 249-98-70
http://1september.ru

ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ПОДПИСКА:
Телефон: (499) 249-47-58
E-mail: podpiska@1september.ru



Системы логических уравнений: решение с помощью битовых цепочек

К.Ю. Поляков,
д. т. н., Санкт-Петербург,
http://kpolyakov.spb.ru,
М.А. Ройтберг,
д. ф.-м. н., г. Пущино,
http://ege-go.ru

Во время проведения ЕГЭ-2011 в контрольно-измерительных материалах (КИМ) впервые появилась задача, в которой требовалось найти количество решений системы логических уравнений. Автором этой интересной и сложной задачи, давшей начало целому классу задач, был Сергей Федорович Сопрунов, известный, в частности, своими методическими материалами по преподаванию языка Лого [1]. Ему же в основном принадлежат идеи, на которых основаны приводимые ниже решения.

При первом знакомстве с задачей состояние учеников (и учителей!) было близко к шоковому, об этом говорит и крайне низкий процент выполнения этого задания на ЕГЭ-2011 — 3,2% (значительно меньше, чем для самой сложной задачи по программированию, С4) [2]. В прошедшие годы (2012–2014) эта задача прочно обосновалась в КИМ, несмотря на многочисленные претензии учителей информатики. В первую очередь это связано с тем, что она действительно оказалась сложной. Многие педагоги, в том числе и в известных на всю страну физико-математических школах, открыто рекомендуют своим ученикам не решать эту задачу вообще или решать ее в последнюю очередь, когда все остальное решено и осталось свободное время. В то же время, как показал опыт, задача является хорошим ориентиром при изучении логики и позволяет сильным ученикам проявить себя при сдаче ЕГЭ.

Учителями информатики было предложено несколько методов решения систем логических уравнений, большинство из которых сводилось к последовательному подключению уравнений: сначала вычисляется количество решений первого уравнения, потом — системы из первых двух уравнений и т.д. К сожалению, все решения этого типа получаются достаточно громоздкими [3–6]. Тем не менее процент выполнения этого задания уже через год повысился до 13,2% [7]. К сожалению, аналитические отчеты Федеральной комиссии за 2013 и 2014 годы не публиковались, поэтому отследить дальнейшее развитие ситуации по официальным источникам невозможно.

В данной статье мы попробуем ответить на такие вопросы:

1) что же на самом деле проверяется в этом задании?

2) как решать характерные типы задач с системами логических уравнений, затрачивая минимум усилий и используя максимум знаний?

Решение — битовый вектор

Пусть задана некоторая система логических (часто говорят — булевых) уравнений от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_N$ вида

$$F_1(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 1$$
$$\ldots$$
$$F_M(x_1, x_2, \ldots, x_N) = 1$$

Слово "логических" означает, что переменные $x_1, x_2, \ldots, x_N$ — логические, то есть принимают значения 0 или 1, и выражения $F_1, \ldots F_M$, зависящие от этих переменных, — тоже логические (множество их возможных значений — {0, 1}). Решением этой системы называется такой вектор значений $X = x_1 x_2 \ldots x_N$, при котором все уравнения обращаются в тождества. Поскольку все переменные, входящие в решение X, логические (0 или 1), все решение можно рассматривать как цепочку нулей и единиц длиной N. Такие цепочки называют *битовыми цепочками*, или *битовыми векторами*.

При анализе систем логических уравнений удобно не исключать поочередно неизвестные, как это часто делается при решении алгебраических уравнений, а рассматривать битовый вектор–решение как целое, как единый объект. Результатом такого анализа будет описание множества векторов-решений, которое позволит подсчитать количество решений.

Как и в случае алгебраических уравнений, до того, как исследовать возможные решения, систему бывает полезно упростить или использовать замену переменных.

Для начала мы разберем несколько простых уравнений и систем, а затем перейдем к более сложным, которые использовались в задачах ЕГЭ прошлых лет.

Отметим, что для проверки правильности решений систем логических уравнений можно использовать бесплатную программу, которая размещена на сайте [3].

Простейшие случаи

Задача 1. Найти число решений уравнения[1]

$$(x_1 \equiv x_2)\cdot(x_2 \equiv x_3)\cdot\ldots\cdot(x_4 \equiv x_5) = 1.$$

Решение. Все "сомножители"[2] имеют форму $x_i \equiv x_{i+1}$, они должны быть равны 1. Это значит, что любые два соседних бита должны быть равны. Существует всего две таких цепочки:

000000, 111111.

Ответ: два решения.

Задача 2. Найти число решений уравнения

$$(\overline{x_1 \equiv x_2})\cdot(\overline{x_2 \equiv x_3})\cdot\ldots\cdot(\overline{x_4 \equiv x_5}) = 1.$$

Решение. Все "сомножители" имеют форму $(\overline{x_i \equiv x_{i+1}})$, они должны быть равны 1. Это значит, что каждые два соседних бита должны быть различны, то есть нули и единицы в битовой цепочке чередуются. Существует всего две таких цепочки:

101010, 010101.

Ответ: два решения.

Задача 3. Найти число решений уравнения

$$(x_1 \to x_2)\cdot(x_2 \to x_3)\cdot\ldots\cdot(x_5 \to x_6) = 1.$$

Решение. Подобно рассмотренным выше задачам, все импликации $(x_1 \to x_2)$, …, $(x_5 \to x_6)$ должны быть истинны. Импликация $a \to b$ ложна только при $a = 1$ и $b = 0$. Иными словами, если $a = 1$, то и $b = 1$. Поэтому, если битовый вектор $X = x_1 x_2 \ldots x_3$ — решение данного уравнения, и в нем встретилась единица, то правее нее будут только единицы (сочетание "10" запрещено!). С другой стороны, если вектор удовлетворяет приведенному условию, он будет решением уравнения. Таким образом, уравнение имеет семь решений:

000000, 000001, 000011, 000111,
001111, 011111, 111111.

Каждое решение определяется тем, в какой позиции первый раз встречается единица: на 1-м, 2-м, …, 6-м месте или вообще не встречается.

Ответ: семь решений.

Задача 4. Найти число решений уравнения

$$((x_1 + x_2) \to x_3)\cdot((x_2 + x_3) \to x_4)\cdot\ldots\cdot((x_4 + x_5) \to x_6) = 1.$$

Решение. Все сомножители имеют форму $(x_i + x_{i+1}) \to x_{i+2}$, они должны быть равны 1, то есть недопустима импликация 1 → 0. Поскольку левая часть импликации — это логическая сумма двух соседних битов, а правая — следующий за ними бит, можно сделать вывод: ***слева от каждого нулевого бита (начиная с третьего) должны обязательно стоять два нуля***. Этому условию удовлетворяют цепочки вида "все нули, потом — все единицы":

111111, 011111, 001111, 000111,
000011, 000001, 000000.

Кроме того, этому уравнению удовлетворяет

[1] Здесь и далее конъюнкция обозначена знаком "·", дизъюнкция — знаком "+", а инверсия — чертой сверху, как это принято в учебнике [8].

[2] Мы используем термин "сомножитель" для элементов конъюнкции, имея в виду, что конъюнкцию часто называют "логическим умножением" (см. предыдущую сноску). В научной литературе используется термин "конъюнкт". Подробнее см. раздел "Обсуждение".

еще одна цепочка: 101111. Всего уравнение имеет восемь решений.

Ответ: восемь решений.

Задача 5. Найти число решений уравнения $(x_1+x_2)\cdot(x_2+x_3)\cdot\ldots\cdot(x_5+x_6)=1$.

Решение. Для того чтобы логическое произведение было равно 1, необходимо, чтобы значение в каждой из скобок было равно 1. Так как в скобках содержится логическая сумма (дизъюнкция) двух соседних битов, в решении $X=x_1x_2\ldots x_6$ соседние биты не могут одновременно быть равны нулю. Таким образом, в словесной форме ограничение, которое накладывается этим уравнением, выглядит так: "в битовой цепочке X нет двух подряд идущих нулей". Здесь и далее битовые цепочки, удовлетворяющие условию задачи, будем называть *правильными*.

Число правильных битовых цепочек длины N обозначим как K_N. Очевидно, что существуют две такие цепочки длиной 1 (0 и 1), так что $K_1 = 2$. Кроме того, можно построить три правильных цепочки длиной 2: 01, 10 и 11, то есть $K_2 = 3$. Далее в общем виде найдем количество цепочек длиной N в виде рекуррентной формулы.

Если на конце битовой цепочки длиной N стоит 0, то предыдущий символ обязательно должен быть равен 1 (чтобы не получилось пары нулей), а вся начальная часть слева от него должна быть правильной цепочкой (без соседних нулей) длины $N-2$. Это дает K_{N-2} решений с нулем на конце.

Если же в конце цепочки стоит 1, то начальная часть может быть любой правильной битовой цепочкой длины $N-1$, это дает K_{N-1} решений с единицей на конце. Таким образом, получаем рекуррентную формулу для $N > 2$:

$$K_N=K_{N-1}+K_{N-2}.$$

Вспомнив, что начальные значения последовательности — $K_1 = 2$ и $K_2 = 3$, получаем числа ряда Фибоначчи[3] ($K_i=F_{i+2}$):

$$K_3=K_2+K_1=5,\quad K_4=K_3+K_2=8,$$
$$K_5=K_4+K_3=13,\quad K_6=K_5+K_4=21.$$

Ответ: двадцать одно решение.

Задача 6. Найти число решений уравнения

$$(x_1\cdot x_2\to x_3)\cdot(x_2\cdot x_3\to x_4)\cdot\ldots\cdot(x_4\cdot x_5\to x_6)=1.$$

Решение. Для того чтобы левая часть уравнения была равна 1, необходимо и достаточно, чтобы каждый из сомножителей был равен 1. Поскольку импликация дает ноль только в случае $1\to 0$, после того, как в битовой цепочке $X=x_1x_2\ldots x_6$ появляются две единицы подряд (и таким образом $x_i\cdot x_{i+1}=1$), все следующие биты должны быть также равны 1. Таким образом, любое решение состоит из двух частей:

1) "голова", которая заканчивается на ноль и в которой нет двух единиц подряд;

2) "хвост", состоящий из одних единиц.

Предположим, что "голова" состоит из m битов ($0\le m\le 6$), а "хвост", соответственно, из $6-m$ единичных битов. Такой "хвост" — единственный, так что число решений этого класса определяется количеством возможных "голов".

"Голова", в свою очередь, имеет свою структуру: последний бит — ноль, а остальные представляют собой битовую цепочку, в которой нет двух соседних единиц. При $m=0$ "голова" — пустая; при $m=1$ тоже есть только одна голова — "0"; при $m=2$ — две "головы" ("00" и "10"), при следующих значениях m число возможных "голов" определяется последовательностью Фибоначчи (см. задачу 5): 3, 5, 8, 13. Таким образом, у исходного уравнения есть

1) одно решение, состоящее из одних единиц;

2) одно решение с нулем в первой позиции;

3) два решения с нулем во второй позиции и т.д.

Всего получается 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 = = 33 решения.

Ответ: 33 решения.

Задача 7. Найти число решений уравнения

$$x_1\to x_2\to x_3\to x_4\to x_5\to x_6=1.$$

Решение. Вспомним, что операции импликации выполняются слева направо, поэтому фактически это уравнение равносильно следующему:

$$((((x_1\to x_2)\to x_3)\to x_4)\to x_5)\to x_6=1.$$

Для уравнения с N неизвестными общее количество комбинаций логических переменных равно 2^N. Обозначим число решений такого уравнения через K_N, а число решений аналогичного уравнения с нулем в правой части — через Z_N.

Очевидно, что $K_N = 2^N - Z_N$. Чтобы использовать эту формулу, рассмотрим аналогичное уравнение с нулем в правой части:

$$((((x_1\to x_2)\to x_3)\to x_4)\to x_5)\to x_6=0.$$

Импликация равна 0 только для случая $1\to 0$, поэтому число решений последнего уравнения совпадает с количеством решений уравнения

$$(((x_1\to x_2)\to x_3)\to x_4)\to x_5=1$$

(при этом $x_6 = 0$). В общем случае $Z_N=K_{N-1}=2^{N-1}-Z_{N-1}$. Тогда, используя равенство $K_N=2^N-Z_N$, получаем рекуррентную формулу:

$$K_N=2^N-K_{N-1}.$$

Начальное значение для вычисления определим из уравнения с двумя неизвестными: для $x_1\to x_2=1$ получаем три решения: (0,0), (0,1) и (1,1), — то есть $K_2 = 3$. Тогда

$$K_3=2^3-K_2=8-3=5$$
$$K_4=2^4-K_3=16-5=11$$
$$K_5=2^5-K_4=32-11=21$$
$$K_6=2^6-K_5=64-21=43$$

Ответ: 43 решения.

Демоварианты ЕГЭ

Теперь покажем, как использовать такой подход для решения систем логических уравнений из демонстрационных вариантов ЕГЭ по информатике разных лет.

[3] Ряд Фибоначчи задается рекуррентной формулой $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$ ($n\ge 3$) с начальными условиями $F_1 = F_2 = 1$.

Задача 8 (ЕГЭ-2015, [9]). Найти число решений системы уравнений

$$(x_1+x_2)\cdot(x_1\cdot x_2\to x_3)\cdot(\bar{x}_1+y_1)=1$$
$$(x_2+x_3)\cdot(x_2\cdot x_3\to x_4)\cdot(\bar{x}_2+y_2)=1$$
$$\ldots$$
$$(x_6+x_7)\cdot(x_6\cdot x_7\to x_8)\cdot(\bar{x}_6+y_6)=1$$
$$(x_7+x_7)\cdot(\bar{x}_7+y_7)=1$$
$$\bar{x}_8+y_8=1$$

Решение. Для того чтобы левая часть уравнения была равна 1, необходимо и достаточно, чтобы каждый из сомножителей был равен 1. Посмотрим, какие условия накладывают на решение (битовую цепочку *X*) отдельные сомножители.

1) Сомножители вида x_i+x_{i+1} равны нулю только тогда, когда в решении два соседних бита равны нулю. Поэтому в решении не может быть двух соседних нулей.

2) Сомножители вида $x_i\cdot x_{i+1}\to x_{i+2}$ равны нулю только тогда, когда в битовой цепочке после двух единиц следует 0. Поэтому вслед за двумя единицами должны идти только единицы.

Следовательно, любая битовая цепочка *X*, которая является решением, состоит из двух частей: "головы", в которой чередуются нули и единицы, и "хвоста", который состоит из одних единиц. Цепочек, которые удовлетворяют этим двум условиям, всего девять:

$$X_0=11111111,\ X_1=01111111,\ X_2=10111111,$$
$$X_3=01011111,\ X_4=10101111,\ X_5=01010111,$$
$$X_6=10101011,\ X_7=01010101,\ X_8=10101010.$$

Здесь нижний индекс обозначает номер последнего нулевого бита в цепочке *X*.

Остается учесть сомножители вида $\bar{x}_i+y_i$, которые связывают битовые цепочки *X* и *Y*, составляющие решение. Пусть $x_i=0$ при некотором *i*. Тогда при любом выборе y_i (0 или 1) логическая сумма $\bar{x}_i+y_i$ равна 1, что и требуется. Если же $x_i=1$, то для выполнения условия $\bar{x}_i+y_i=1$ необходимо, чтобы $y_i=1$. Таким образом, для каждой единицы в цепочке *X* соответствующий ей бит в цепочке *Y* должен быть обязательно равен 1, а для каждого нулевого бита в *X* соответствующий бит в *Y* может быть любым. Например, для цепочки $X_0=11111111$ имеем единственный допустимый вариант $Y=11111111$, а для каждой из цепочек $X_1=01111111$ и $X_2=10111111$ существует по два варианта *Y*.

В общем случае количество допустимых цепочек *Y* определяется *количеством нулей* $z(X)$ в соответствующей цепочке *X* и вычисляется как $2^{z(X)}$. Цепочки X_3 и X_4 имеют по два нулевых бита, цепочки X_5 и X_6 — по три, а цепочки X_7 и X_8 — по четыре. Таким образом, общее количество решений системы вычисляется как $2^0+2\cdot(2^1+2^2+2^3+2^4)=61$.

Ответ: 61 решение.

Задача 9 (ЕГЭ-2014). Найти число решений системы уравнений

$$\overline{(x_1\equiv x_2)}\cdot(x_1\cdot\bar{x}_3+\bar{x}_1\cdot x_3)=0$$
$$\overline{(x_2\equiv x_3)}\cdot(x_2\cdot\bar{x}_4+\bar{x}_2\cdot x_4)=0$$
$$\ldots$$
$$\overline{(x_8\equiv x_9)}\cdot(x_8\cdot\bar{x}_{10}+\bar{x}_8\cdot x_{10})=0$$

Решение. Вспомним формулу (см. табл. 1 на с. 12), которая представляет операцию "не эквивалентно" ("исключающее ИЛИ"): $\overline{(a\equiv b)}=a\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot b$. С учетом этого исходная система запишется в виде:

$$\overline{(x_1\equiv x_2)}\cdot\overline{(x_1\equiv x_3)}=0$$
$$\overline{(x_2\equiv x_3)}\cdot\overline{(x_2\equiv x_4)}=0$$
$$\ldots$$
$$\overline{(x_8\equiv x_9)}\cdot\overline{(x_8\equiv x_{10})}=0$$

Левая часть уравнения равна 1, если очередной элемент не равен ни одному из двух следующих, то есть в цепочке *X*, которая является решением, запрещены комбинации 100 и 011. Это значит, что может быть два варианта:

1) сначала цепочка нулей, потом биты чередуются (1/0);

2) сначала цепочка единиц, потом биты чередуются.

Несложно выписать подобные цепочки, начинающиеся с нуля:

0000000000,
0000000001,
0000000010,
0000000101,
…
0101010101.

Для системы с 10 переменными таких цепочек будет 10. Кроме того, будет еще 10 подходящих цепочек, которые начинаются с единицы:

1111111111,
1111111110,
1111111101,
1111111010,
…
1010101010.

Таким образом, система уравнений имеет 20 решений.

Ответ: 20 решений.

Задача 10 (ЕГЭ-2013). Найти число решений системы уравнений

$$(x_1\to x_2)\cdot(x_2\to x_3)\cdot(x_3\to x_4)=1$$
$$(\bar{y}_1+y_2)\cdot(\bar{y}_2+y_3)\cdot(\bar{y}_3+y_4)=1$$
$$(y_1\to x_1)\cdot(y_2\to x_2)\cdot(y_3\to x_3)\cdot(y_4\to x_4)=1$$

Решение. Преобразуем второе уравнение. Заметим, что $\bar{a}+b=a\to b$, тогда получаем эквивалентную систему

$$(x_1\to x_2)\cdot(x_2\to x_3)\cdot(x_3\to x_4)=1$$
$$(y_1\to y_2)\cdot(y_2\to y_3)\cdot(y_3\to y_4)=1$$
$$(y_1\to x_1)\cdot(y_2\to x_2)\cdot(y_3\to x_3)\cdot(y_4\to x_4)=1$$

Как следует из решения задачи 3, первое уравнение имеет пять решений:

0000, 0001, 0011, 0111 и 1111.

Такие же решения имеет и второе уравнение, которое не связано с первым. Поэтому система из первых двух уравнений имеет всего 25 решений.

Третье уравнение связывает первое и второе. Импликация $y_i\to x_i$ должна быть равна 1 для любого *i*, поэтому запрещена комбинация $y_i=1; x_i=0$. Рассмотрим цепочку $Y=0000$, которая не содержит единиц. В этом случае никаких ограничений на цепочку *X* (решение первого уравнения) не накладывается, она дает пять решений.

Далее, цепочка $Y=0001$ накладывает ограничение на последний бит X, который обязательно должен быть равен 1. Поэтому нужно отобрать только те цепочки X, где последний бит равен 1, их всего 4. Аналогично цепочка $Y=0011$ дает три допустимых цепочки X, цепочка $Y=0111$ — две, а цепочка $Y=1111$ — всего одну. Всего получаем 5 + 4 + 3 + + 2 + 1 = 15 решений.

Ответ: 15 решений.

Задача 11 (ЕГЭ-2012). Найти число решений системы уравнений

$$((x_1\equiv x_2)+(x_3\equiv x_4))\cdot(\overline{(x_1\equiv x_2)}+\overline{(x_3\equiv x_4)})=1$$
$$((x_3\equiv x_4)+(x_5\equiv x_6))\cdot(\overline{(x_3\equiv x_4)}+\overline{(x_5\equiv x_6)})=1$$
$$\ldots$$
$$((x_7\equiv x_8)+(x_9\equiv x_{10}))\cdot(\overline{(x_7\equiv x_8)}+\overline{(x_9\equiv x_{10})})=1$$

Решение. Вспомним, что

$$(a+b)\cdot(\overline{a}+\overline{b})=a\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot b=\overline{(a\equiv b)}.$$

Вводя обозначения

$$z_1=(x_1\equiv x_2),\ z_2=(x_3\equiv x_4),\ \ldots,\ z_5=(x_9\equiv x_{10}),$$

исходную систему уравнений можно переписать в виде:

$$\overline{(z_1\equiv z_2)}=1$$
$$\overline{(z_2\equiv z_3)}=1$$
$$\ldots$$
$$\overline{(z_4\equiv z_5)}=1$$

или даже в виде одного уравнения:

$$\overline{(z_1\equiv z_2)}\cdot\overline{(z_2\equiv z_3)}\cdot\overline{(z_3\equiv z_4)}\cdot\overline{(z_4\equiv z_5)}=1$$

Как следует из решения задачи 2, это уравнение имеет всего два решения: Z = 01010 и Z = 10101.

Теперь остается перейти к исходным переменным. Уравнение $z_i=(x_{2i-1}\equiv x_{2i})=0$ имеет два решения: $(x_{2i-1},x_{2i})=(0,1)$ и $(x_{2i-1},x_{2i})=(1,0)$; аналогично уравнение $z_i=1$ имеет два решения: $(x_{2i-1},x_{2i})=(0,0)$ и $(x_{2i-1},x_{2i})=(1,1)$. Поэтому каждый бит каждой допустимой цепочки Z дает два решения в исходных переменных. Поскольку каждая из двух цепочек Z содержит пять битов, всего получаем 2×2^5 = 64 решения исходной системы уравнений.

Ответ: 64 решения.

Другие задачи

Задача 12. Найти число решений системы уравнений

$$(x_1\to x_2)\cdot(x_2\to x_3)\cdot(x_3\to x_4)=1$$
$$\overline{x}_1\cdot y_1\cdot z_1+x_1\cdot\overline{y}_1\cdot z_1+x_1\cdot y_1\cdot\overline{z}_1=1$$
$$\overline{x}_2\cdot y_2\cdot z_2+x_2\cdot\overline{y}_2\cdot z_2+x_2\cdot y_2\cdot\overline{z}_2=1$$
$$\overline{x}_3\cdot y_3\cdot z_3+x_3\cdot\overline{y}_3\cdot z_3+x_3\cdot y_3\cdot\overline{z}_3=1$$
$$\overline{x}_4\cdot y_4\cdot z_4+x_4\cdot\overline{y}_4\cdot z_4+x_4\cdot y_4\cdot\overline{z}_4=1$$

Решение. Сначала рассмотрим первое уравнение. Как следует из решения задачи 3, оно ограничивает цепочку $X=x_1x_2x_3x_4$ так, что в ней сначала должны идти все нули, а потом — все единицы. Всего таких цепочек пять (индекс показывает количество единичных битов):

$$X_0=0000,\ X_1=0001,\ X_2=00011,$$
$$X_3=0111,\ X_4=1111.$$

Будем по очереди подставлять эти решения в последние четыре уравнения. Для цепочки X_0 (при $x_1=x_2=x_3=x_4=0$) получаем

$$y_1\cdot z_1=1$$
$$y_2\cdot z_2=1$$
$$y_3\cdot z_3=1$$
$$y_4\cdot z_4=1$$

Это значит, что существуют единственные цепочки $Y=Z=1111$, которые удовлетворяют всей системе уравнений.

Для цепочки X_1 последнее уравнение превращается в $\overline{y}_4\cdot z_4+y_4\cdot\overline{z}_4=1$. Это значит, что последние биты цепочек Y и Z должны быть различны, так что есть два допустимых варианта: $(y_4,z_4)=(0,1)$ и $(y_4,z_4)=(1,0)$. Следовательно, цепочка X_1 дает два решения всей системы.

Аналогично при использовании цепочки X_2 последние и предпоследние биты цепочек Y и Z должны быть попарно различны ($y_3\neq z_3$ и $y_4\neq z_4$), так что получаем 2^2 = 4 решения. Цепочка X_3 дает 2^3 = 8 решений, а цепочка X_4 – 2^4 = 16 решений. Общее количество решений системы равно 1 + 2 + + 4 + 8 + 16 = 31.

Ответ: 31 решение.

Замечание. Второе уравнение системы означает, что среди значений x_1,y_1,z_1 ровно одно равно 0, а остальные равны 1. Смысл третьего и четвертого уравнений аналогичен.

Задача 13. Найти число решений системы уравнений:

$$(x_1\to x_2)\cdot(x_2\to x_3)\cdot(x_3\to x_4)\cdot(x_4\to x_5)\cdot(x_5\to x_6)=1$$
$$(y_1\to y_2)\cdot(y_2\to y_3)\cdot(y_3\to y_4)\cdot(y_4\to y_5)\cdot(y_5\to y_6)=1$$
$$y_6+x_1=1$$

Решение. Как следует из решения задачи 3, первое уравнение имеет семь решений: 000000, 000001, 000011, 000111, 001111, 011111 и 111111.

Такие же решения имеет и второе уравнение, которое не связано с первым. Если бы не было третьего уравнения, система имела бы 7×7 = 49 решений.

Третье уравнение накладывает ограничения: нужно отбросить все решения, где одновременно $x_1=y_6=0$. Поэтому для каждой цепочки X, где первый бит равен 0 (таких цепочек 6), нужно исключить одно решение Y = 000000, всего исключается шесть решений. Для цепочки X = 111111 никаких ограничений на Y не накладывается. Поэтому общее количество решений равно 49 – 6 = 43.

Ответ: 43 решения.

Задача 14. Найти число решений системы уравнений

$$(x_1\equiv x_2)\to(x_2\equiv x_3)=1$$
$$(x_2\equiv x_3)\to(x_3\equiv x_4)=1$$
$$\ldots$$
$$(x_5\equiv x_6)\to(x_6\equiv x_7)=1$$

Решение. Вспомним, что импликация дает ноль только для случая 1 → 0. Поэтому запрещены решения (битовые цепочки), в которых $x_i=x_{i+1}$ и $x_{i+1}\neq x_{i+2}$, то есть запрещены комбинации 110 и 001. Иными словами, если значения двух соседних битов совпали, то и все последующие биты будут иметь то же значение. Таким образом, все решения имеют следующую структуру: сначала нули и единицы чередуются, потом следуют только нули или только единицы.

Рассмотрим все варианты, которые завершаются цепочкой нулей. Их не так много — семь, они различаются по количеству нулей в конце:

0000000, 1000000, 0100000, 1010000, 0101000, 1010100, 0101010.

Кроме того, существует столько же (семь) вариантов, которые завершаются цепочкой единиц:

1111111, 0111111, 1011111, 0101111, 1010111, 0101011, 1010101.

Общее число решений уравнения — 14.

Ответ: 14 решений.

Задача 15. Найти число решений системы уравнений

$$(x_1 \to x_2) \to (x_3 \to x_4) = 1$$
$$(x_3 \to x_4) \to (x_5 \to x_6) = 1$$
$$(x_5 \to x_6) \to (x_7 \to x_8) = 1$$

Решение. Используем замену переменных, обозначив

$$z_1 = x_1 \to x_2,\ \ z_2 = x_3 \to x_4,$$
$$z_3 = x_5 \to x_6,\ \ z_4 = x_7 \to x_8.$$

Тогда систему уравнений можно переписать как

$$z_1 \to z_2 = 1$$
$$z_2 \to z_3 = 1$$
$$z_3 \to z_4 = 1$$

или в виде одного уравнения

$$(z_1 \to z_2)\cdot(z_2 \to z_3)\cdot(z_3 \to z_4) = 1$$

Как мы знаем (см. решение задачи 3), это уравнение имеет пять решений, в каждом из которых сначала идет цепочка нулей, а потом — цепочка единиц (индекс обозначает количество единиц):

$$Z_0 = 0000,\ Z_1 = 0001,\ Z_2 = 0011,$$
$$Z_3 = 0111 \text{ и } Z_4 = 1111.$$

Теперь нужно перейти к исходным переменным. Поскольку выражение $a \to b$ равно нулю для одной комбинации (a,b) и равно 1 для трех случаев, каждый ноль в цепочке Z дает одно решение в исходных переменных, а каждая единица — три решения. Поэтому общее число решений равно

$$3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 121.$$

Здесь слагаемое 3^0 соответствует решению $Z_0 = 0000$, слагаемое 3^1 — решению $Z_1 = 0001$ и т.д.

Ответ: 121 решение.

Задача 16. Найти число решений системы уравнений

$$\overline{(x_1 \equiv x_2)}\cdot\overline{(x_2 \equiv x_3)} = 1$$
$$\overline{(x_2 \equiv x_3)}\cdot\overline{(x_3 \equiv x_4)} = 1$$
$$\ldots$$
$$\overline{(x_8 \equiv x_9)}\cdot\overline{(x_9 \equiv x_{10})} = 1$$

Решение. Все эти уравнения имеют вид $\overline{(x_i \equiv x_{i+1})}\cdot\overline{(x_{i+1} \equiv x_{i+2})} = 1$. Это говорит о том, что средний элемент, x_{i+1}, не равен своим соседям. Таким образом, значения битов в цепочке X, которая является решением системы, чередуются. Существует всего две таких цепочки — одна начинается с 0, вторая — с 1: 0101010101 и 1010101010.

Ответ: два решения.

Задача 17. Найти число решений системы уравнений

$$x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 = 1$$
$$x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 = 1$$
$$\ldots$$
$$x_7 \cdot \bar{x}_8 \cdot \bar{x}_9 + \bar{x}_7 \cdot x_8 \cdot \bar{x}_9 + \bar{x}_7 \cdot \bar{x}_8 \cdot x_9 = 1$$

Решение. Все уравнения в системе имеют вид $x_i \cdot \bar{x}_{i+1} \cdot \bar{x}_{i+2} + \bar{x}_i \cdot x_{i+1} \cdot \bar{x}_{i+2} + \bar{x}_i \cdot \bar{x}_{i+1} \cdot x_{i+2} = 1$. Таким образом, в битовой цепочке X, которая является решением, допустимы только комбинации 010, 001 и 100. Соответственно, недопустимы 000, 011, 101, 110 и 111, то есть недопустимы три одинаковых бита подряд, две единицы и ноль, окруженный двумя единицами. Это означает, что в любой допустимой цепочке X происходит чередование “единица — два нуля”. Для системы с любым количеством неизвестных таких цепочек всего три: первая начинается с единицы, вторая — с одного нуля, а третья — с двух нулей:

100100100…, 010010010… и 001001001…

Ответ: три решения.

Замечание. Условие на цепочки-решения можно сформулировать и так: “среди любых трех соседних битов есть ровно одна единица” (см. замечание к задаче 12).

Задача 18. Найти число решений системы уравнений

$$x_1 \to x_2 \to x_3 \to x_4 \to x_5 \to x_6 = 1$$
$$y_1 \to y_2 \to y_3 \to y_4 \to y_5 \to y_6 = 1$$
$$x_1 \to y_6 = 0$$
$$y_6 \to y_1 = 0$$

Решение. Из равенства $x_1 \to y_6 = 0$ сразу следует, что $x_1 = 1$ и $y_6 = 0$. Кроме того, из последнего уравнения получаем, что $y_6 = 1$ и $y_1 = 0$. Мы получили противоречие, поскольку переменная y_6 не может быть одновременно равна и 0, и 1. Система решений не имеет.

Ответ: 0 решений.

Замечание. При этом первые два уравнения могут быть любыми или отсутствовать вовсе.

Задача 19. Найти число решений системы уравнений

$$(x_1 \equiv x_2) + (x_3 \equiv x_4) = 0$$
$$(x_4 \equiv x_5) + (x_6 \equiv x_7) = 0$$
$$(x_7 \equiv x_8) + (x_9 \equiv x_{10}) = 0$$
$$(x_{10} \equiv x_{11}) + (x_{12} \equiv x_{13}) = 0$$

Решение. Выясним, какие комбинации битов запрещены в цепочке X, представляющей решение. Используя закон де Моргана $\overline{a+b} = \bar{a}\cdot\bar{b}$, преобразуем систему уравнений к эквивалентной форме с единицами в правой части (выполняем инверсию для обеих частей каждого уравнения):

$$\overline{(x_1 \equiv x_2)}\cdot\overline{(x_3 \equiv x_4)} = 1$$
$$\overline{(x_4 \equiv x_5)}\cdot\overline{(x_6 \equiv x_7)} = 1$$
$$\overline{(x_7 \equiv x_8)}\cdot\overline{(x_9 \equiv x_{10})} = 1$$
$$\overline{(x_{10} \equiv x_{11})}\cdot\overline{(x_{12} \equiv x_{13})} = 1$$

Все уравнения однотипные, каждое из них накладывает ограничение на четыре соседних бита (две пары): в каждой паре биты должны быть разные. Возможны только четыре таких блока из четырех битов: 0101, 0110, 1001 и 1010.

Четырехбитные блоки связываются через один общий бит (x_4, x_7). Если этот бит равен 0, возможны два варианта следующего блока: 0101 и 0110; если он равен 1, то тоже два варианта: 1001 и 1010. Таким образом, каждое новое уравнение в системе увеличивает количество решений в два раза. Для системы из четырех уравнений получаем 4 · 2 · 2 · 2=32.

Ответ: 32 решения.

Задача 20. Найти число решений системы уравнений

$$\begin{aligned}
&x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 = 1\\
&x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + x_5 \cdot x_6 + \bar{x}_5 \cdot \bar{x}_6 = 1\\
&x_5 \cdot x_6 + \bar{x}_5 \cdot \bar{x}_6 + x_7 \cdot x_8 + \bar{x}_7 \cdot \bar{x}_8 = 1\\
&x_7 \cdot x_8 + \bar{x}_7 \cdot \bar{x}_8 + x_9 \cdot x_{10} + \bar{x}_9 \cdot \bar{x}_{10} = 1
\end{aligned}$$

Решение. Сначала заметим, что слагаемые, соответствующие каждой паре переменных, могут быть сгруппированы и преобразованы с помощью равенства $a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b} = (a \equiv b)$ к виду

$$\begin{aligned}
&(x_1 \equiv x_2) + (x_3 \equiv x_4) = 1\\
&(x_3 \equiv x_4) + (x_5 \equiv x_6) = 1\\
&(x_5 \equiv x_6) + (x_7 \equiv x_8) = 1\\
&(x_7 \equiv x_8) + (x_9 \equiv x_{10}) = 1
\end{aligned}$$

Теперь можно использовать замену переменных:

$$z_1 = (x_1 \equiv x_2),\quad z_2 = (x_3 \equiv x_4),\quad z_3 = (x_5 \equiv x_6),$$
$$z_4 = (x_7 \equiv x_8),\quad z_5 = (x_9 \equiv x_{10})$$

так что получается система

$$\begin{aligned}
&z_1 + z_2 = 1\\
&z_2 + z_3 = 1\\
&z_3 + z_4 = 1\\
&z_4 + z_5 = 1
\end{aligned}$$

которую можно записать в виде одного уравнения

$$(z_1 + z_2) \cdot (z_2 + z_3) \cdot (z_3 + z_4) \cdot (z_4 + z_5) = 1.$$

Такое уравнение мы уже рассматривали ранее (задача 5, см. значение K_5), оно имеет 13 решений.

Остается перейти к исходным переменным. Поскольку каждая из переменных z_i — это эквивалентность двух независимых переменных (x_{2i-1} и x_{2i}), любому значению z_i соответствуют две пары значений (x_{2i-1}, x_{2i}). Так как цепочка-решение $Z = z_1 z_2 z_3 z_4 z_5$ состоит из пяти битов, каждое из 13 таких решений дает 2^5 = 32 решения в исходных переменных. Всего получается 13×32 = 416 решений.

Ответ: 416 решений.

Задача 21. Найти число решений системы уравнений

$$\begin{aligned}
&(x_1 \equiv x_2) \cdot (x_3 \equiv x_4) + \overline{(x_1 \equiv x_2)} \cdot \overline{(x_3 \equiv x_4)} = 0\\
&(x_3 \equiv x_4) \cdot (x_5 \equiv x_6) + \overline{(x_3 \equiv x_4)} \cdot \overline{(x_5 \equiv x_6)} = 0\\
&(x_5 \equiv x_6) \cdot (x_7 \equiv x_8) + \overline{(x_5 \equiv x_6)} \cdot \overline{(x_7 \equiv x_8)} = 0\\
&(x_7 \equiv x_8) \cdot (x_9 \equiv x_{10}) + \overline{(x_7 \equiv x_8)} \cdot \overline{(x_9 \equiv x_{10})} = 0
\end{aligned}$$

Решение. Очевидно, что здесь удобно использовать замену переменных:

$$z_1 = (x_1 \equiv x_2),\quad z_2 = (x_3 \equiv x_4),\quad z_3 = (x_5 \equiv x_6),$$
$$z_4 = (x_7 \equiv x_8),\quad z_5 = (x_9 \equiv x_{10})$$

Тогда получим

$$\begin{aligned}
&z_1 \cdot z_2 + \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = 0\\
&z_2 \cdot z_3 + \bar{z}_2 \cdot \bar{z}_3 = 0\\
&z_3 \cdot z_4 + \bar{z}_3 \cdot \bar{z}_4 = 0\\
&z_4 \cdot z_5 + \bar{z}_4 \cdot \bar{z}_5 = 0
\end{aligned}$$

Далее замечаем, что с помощью формулы $a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b} = (a \equiv b)$ можно преобразовать эту систему к виду

$$\begin{aligned}
&(z_1 \equiv z_2) = 0\\
&(z_2 \equiv z_3) = 0\\
&(z_3 \equiv z_4) = 0\\
&(z_4 \equiv z_5) = 0
\end{aligned}$$

Применяем инверсию к обеим частям уравнения:

$$\begin{aligned}
&\overline{(z_1 \equiv z_2)} = 1\\
&\overline{(z_2 \equiv z_3)} = 1\\
&\overline{(z_3 \equiv z_4)} = 1\\
&\overline{(z_4 \equiv z_5)} = 1
\end{aligned}$$

и сворачиваем систему в одно уравнение:

$$\overline{(z_1 \equiv z_2)} \cdot \overline{(z_2 \equiv z_3)} \cdot \overline{(z_3 \equiv z_4)} \cdot \overline{(z_4 \equiv z_5)} = 1$$

Как следует из решения задачи 2, это уравнение имеет всего два решения: $Z = 01010$ и $Z = 10101$.

Переходя к исходным переменным так же, как и в задаче 20, находим, что исходная система имеет 2 · 2^5 = 64 решения.

Ответ: 64 решения.

Задача 22. Найти число решений системы уравнений

$$\begin{aligned}
&x_1 \cdot \bar{x}_2 + \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 = 1\\
&x_3 \cdot \bar{x}_4 + \bar{x}_3 \cdot x_4 + x_5 \cdot x_6 + \bar{x}_5 \cdot \bar{x}_6 = 1\\
&x_5 \cdot \bar{x}_6 + \bar{x}_5 \cdot x_6 + x_7 \cdot x_8 + \bar{x}_7 \cdot \bar{x}_8 = 1\\
&x_7 \cdot \bar{x}_8 + \bar{x}_7 \cdot x_8 + x_9 \cdot x_{10} + \bar{x}_9 \cdot \bar{x}_{10} = 1
\end{aligned}$$

Решение. Заметим, что с помощью формул $a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b = \overline{(a \equiv b)}$ и $a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b} = (a \equiv b)$ исходную систему можно свести к следующей:

$$\begin{aligned}
&\overline{(x_1 \equiv x_2)} + (x_3 \equiv x_4) = 1\\
&\overline{(x_3 \equiv x_4)} + (x_5 \equiv x_6) = 1\\
&\overline{(x_5 \equiv x_6)} + (x_7 \equiv x_8) = 1\\
&\overline{(x_7 \equiv x_8)} + (x_9 \equiv x_{10}) = 1
\end{aligned}$$

Теперь используем замену переменных:

$$z_1 = (x_1 \equiv x_2),\quad z_2 = (x_3 \equiv x_4),\quad z_3 = (x_5 \equiv x_6),$$
$$z_4 = (x_7 \equiv x_8),\quad z_5 = (x_9 \equiv x_{10})$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
&\bar{z}_1 + z_2 = 1\\
&\bar{z}_2 + z_3 = 1\\
&\bar{z}_3 + z_4 = 1\\
&\bar{z}_4 + z_5 = 1
\end{aligned}$$

и сворачиваем систему в одно уравнение, используя равенство $\bar{a} + b = a \to b$:

$$(z_1 \to z_2) \cdot (z_2 \to z_3) \cdot (z_3 \to z_4) \cdot (z_4 \to z_5) = 1.$$

Как следует из решения задачи 3, это уравнение имеет шесть решений. Переходя к исходным переменным так же, как и в задачах 20–21, находим, что исходная система имеет 6 · 2^5 = 192 решения.

Ответ: 192 решения.

Обсуждение

Мы рассмотрели класс задач, связанных с решением систем логических уравнений. Эти решения удобно представлять в виде битовых векторов, что может оказаться непривычным для учеников.

При разборе этого материала можно указать на аналогию между представлением решения логических систем в виде битовых векторов и представлением решения алгебраических систем в виде точек (векторов) на плоскости или в пространстве. Аналогия между алгеброй и логикой представляется продуктивной при разборе рассматриваемой темы. Проследим эти аналогии и различия.

Начнем с того, что рассмотренные задачи во многом непривычны, если отталкиваться от уравнений и систем, изучаемых в курсе математики. Непривычна сама постановка задачи, предполагающая, что система имеет много решений. В школьной математике уравнение (система), как правило, имеет одно решение или немного решений. На это отличие стоит обратить внимание учеников, особенно сильных.

Далее, непривычно то, что мы стараемся понять, как устроено все множество решений, и только затем, на основе этого понимания, определяем количество решений и (хотя это и не требуется по условию задачи) можем выписать сами решения. Уравнения, входящие в систему, рассматриваются как ограничения, наложенные на комбинации битов. Аналогом такой постановки задачи в школьной математике являются вопросы типа "Как устроено множество точек (x, y), удовлетворяющих уравнению $x^2+y^2=1$?". Умение переводить описание набора битовых решений с языка систем логических уравнений на более "естественный" язык — это то, что требуется ученику при решении рассмотренных задач.

Отметим, что при решении некоторых задач, даже поняв, какие ограничения на множество битовых векторов-решений накладывают уравнения, мы не можем написать явную формулу для количества решений. Однако во многих подобных случаях удается написать рекуррентное уравнение и с его помощью решить задачу (см. задачи 6, 7).

Таким образом, задача сводится к тому, чтобы выявить структуру всех решений (определить, какие комбинации битов допустимы, а какие — запрещены) и подсчитать количество подходящих решений, используя формулы комбинаторики. Так же, как и при решении алгебраических уравнений, при этом нужно:

1) уметь решать базовые ("элементарные") уравнения и

2) уметь упрощать уравнения с помощью тождественных преобразований и замен переменных.

В то же время есть и существенные различия между логическими и алгебраическими уравнениями — как с точки зрения методов решения, так и с точки зрения методики преподавания.

Для алгебраических уравнений набор элементарных для школьного курса уравнений и методов их преобразований давно сложился. Элементарные уравнения — это линейные и квадратные уравнения; методы преобразования — это эквивалентные преобразования уравнений относительно заданной области значений неизвестного, замена переменных, сведение уравнения $F(x)\cdot G(x)=0$ к совокупности уравнений $F(x)=0$ и $G(x)=0$.

Для логических уравнений мы не выделяем набор элементарных уравнений, к которым бы сводились все более сложные уравнения. В разделе "Простейшие уравнения" рассмотрены несколько примеров. Но это именно примеры, а не исчерпывающий список.

В алгебре есть устоявшийся список тождественных преобразований выражений — так называемые "формулы сокращенного умножения" (квадраты и кубы суммы и разности; разность квадратов, сумма и разность кубов), а также формулы, связанные с определением степени и основными законами сложения и умножения (сочетательный, переместительный, распределительный). В курсе логики аналогом такого списка можно считать набор формул, приведенный в табл. 1 на с. 12. Деление формул в таблице — условное и приведено лишь для удобства восприятия. Знания этих формул достаточно, например, для решения всех задач нашей статьи. Желательно, чтобы ученики могли пользоваться этими формулами так же свободно, как и алгебраическими формулами сокращенного умножения. В ЕГЭ по информатике умение преобразовывать логические выражения проверяется в задаче 18 (бывшая А10).

В заключение остановимся на обозначениях логических операций. По традиции в заданиях ЕГЭ конъюнкция, дизъюнкция и отрицание обозначаются, соответственно, знаками "$\wedge$", "$\vee$" и "$\neg$". Среди достоинств этой системы нужно отметить возможность записи логического выражения в одну строку. Знаки "$\wedge$" и "$\vee$" выглядят похоже, и это подчеркивает их двойственность (дуализм), например, в законах де Моргана:

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b \text{ и } \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b.$$

Однако эта система, общепринятая в кругу математиков, не всегда удобна для использования в школе. Во-первых, как уже упоминалось, знаки "$\wedge$" и "$\vee$" похожи друг на друга, и требуется довольно много времени (для одного из авторов на это ушло несколько лет), чтобы запомнить, "что есть что". Во-вторых, эти знаки имеют одинаковую типографическую плотность, и это сильно ухудшает восприятие. Кроме того, в длинных формулах легко ошибиться, определяя область действия знака "$\neg$", который записывается слева от инвертируемого выражения.

Описанная система не единственная, используемая специалистами. Например, часто конъюнкция (логическое умножение) и дизъюнкция (логическое сложение) обозначаются символами "$\cdot$" и "+" соответственно, а отрицание — чертой сверху. Эти обозначения общеприняты среди инженеров (см., например, [10]) и используются в некоторых школьных учебниках [8].

Знаки "$\cdot$" и "+" совпадают со знаками арифметических операций (умножения и сложения), и это позволяет проводить аналогии с алгебраическими формулами, хорошо известными школьникам. Здесь начинает работать "эффект узнавания": человеку всегда легче изучать новое, если есть "зацепка" за старое, известное. Например, значительно легче быстро определить значение логического

Таблица 1

А. Свойства 0, 1 и отрицания		
Свойства 0 и 1	$a \cdot 0 = 0$	$a + 0 = a$
	$a \cdot 1 = a$	$a + 1 = 1$
Свойства отрицания	$a \cdot \overline{a} = 0$	$a + \overline{a} = 1$
	$\overline{\overline{a}} = a$	
В. Дизъюнкция и конъюнкция		
Сочетательный закон (ассоциативность)	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	$a + (b + c) = (a + b) + c$
Переместительный закон (коммутативность)	$a \cdot b = b \cdot a$	$a + b = b + a$
Закон поглощения (идемпотентность)	$a \cdot a = a$	$a + a = a$
Распределительный закон (дистрибутивность)	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$
Правила де Моргана (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание)	$\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$	$\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$
С. Импликация и эквивалентность		
Определение импликации	$a \to b = \overline{a} + b$	
Полезные свойства импликации	$\overline{a} \to \overline{b} = b \to a$	$a \to (b \to c) = (a \cdot b) \to c$
Эквивалентность	$(a \equiv b) = a \cdot b + \overline{a} \cdot \overline{b}$	$\overline{(a \equiv b)} = a \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot b$

выражения $a \cdot 0$, чем значение $a \wedge 0$ (тут нужно еще вспомнить, что означает “$\wedge$”). С другой стороны, тождества вроде $a + 1 = 1$ могут поначалу сбивать учеников с толку (а могут и не сбивать ☺).

Знаки умножения и сложения имеют различную типографическую плотность, поэтому запись $a \cdot b + c \cdot d$ воспринимается значительно легче, чем $a \wedge b \vee c \wedge d$.

Наконец, черта сверху, обозначающая отрицание, явно и недвусмысленно определяет область действия этой операции. Достаточно сравнить две следующих записи: $\overline{a + \overline{(b + c)}}$ и $\neg(a \vee \neg(b \vee c))$. Недостаток такого подхода — невозможность записать выражение в одну строчку (например, при вставке формулы в документ).

По-видимому, “алгебраические” обозначения более понятны и удобны для многих школьников. В то же время, основным в научной литературе является использование специальных символов для обозначения логических операций (часто вместо “$\wedge$” используется “&”). Таким образом, возможны две тактики. Одна — научить детей свободно пользоваться логическими обозначениями. Другая — научить их переводить выражения из “логических” обозначений в “алгебраические” и наоборот, а содержательную работу вести в “алгебраических” обозначениях. Как во всех подобных случаях, выбор зависит от конкретных обстоятельств.

Один из авторов этой статьи много лет успешно использует “алгебраические” обозначения на уроках информатики. Опыт показывает, что учащиеся понимают и запоминают их значительно легче, чем “логические”, а при необходимости легко преобразуют задания ЕГЭ в привычный формат.

Литература

1. *Сопрунов С.Ф.* Непростое программирование на Лого. М.: Московский институт открытого образования, 2011.
2. Аналитический отчет о результатах ЕГЭ-2011. Информатика и ИКТ. URL: *http://fipi.ru/sites/default/files/document/1408709946/2.11%20inf-11-11.pdf* (дата обращения 16.09.2014).
3. *Поляков К.Ю.* Подготовка к ЕГЭ по информатике [Электронный ресурс] URL: *http://kpolyakov.spb.ru/school/ege.htm* (дата обращения 16.09.2014).
4. *Поляков К.Ю.* Логические уравнения // Информатика, № 14, 2011, с. 30–35.
5. *Мирончик Е.А.* Метод отображения // Информатика, № 10, 2013, с. 18–26.
6. *Мирончик Е.А.* Люблю ЕГЭ за B15, или Еще раз про метод отображения // Информатика, № 7–8, 2014, с. 26–32.
7. Аналитический отчет о результатах ЕГЭ-2012. Информатика и ИКТ. URL: *http://fipi.ru/sites/default/files/document/1408709880/2.11.pdf* (дата обращения 16.09.2014).
8. *Поляков К.Ю., Еремин Е.А.* Информатика. 10-й класс. Углубленный уровень. В двух частях. М.: Бином, 2014.
9. Демоверсия, спецификация, кодификатор ЕГЭ-2015 по информатике [Электронный ресурс] URL: *http://fipi.ru/sites/default/files/document/1409834615/inf11_2015.zip* (дата обращения 16.09.2014).
10. *Лачин В.И., Савёлов Н.С.* Электроника: Учебное пособие. Ростов-на-Дону: Феникс, 2007.