ПОЛИНОМ

№ 1 2009

НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Читателю и автору

Журнал «Полином» является научно-методическим журналом, ориентированным на широкую аудиторию лиц, имеющих отношение к преподаванию математики: учителей, методистов, преподавателей и учащихся педвузов, историков образования.

Основная цель журнала — знакомить читателей с исследованиями в области теории и практики обучения математике, работами по истории математики и истории математического образования.

Название журнала — «Полином» — выбрано неслучайно. За словом «полином» скрывается не только математический объект, рациональная функция, но нечто большее. Слово «полином» происходит от греческого πολυς — многочисленный, обширный и латинского nomen — имя, т.е. фактически «полином» означает «много имен». Такое толкование тесно связано с основной задачей журнала: собирать на своих страницах «много имен», много статей из разных уголков страны и мира в целом.

Каждый желающий может предложить свой текст для публикации в журнале. Основные требования, которым должен удовлетворять текст: 1) быть потенциально интересным для читателей; 2) быть представленным в электронном виде (только текстовый редактор Word). Чертежи желательно изготовлять в программах Corel Draw или Adobe Illustrator (чтобы редактору не приходилось делать рисунки заново).

Журнал является бесплатным, гонорары авторам не выплачиваются.

На электронные ресурсы, как и на бумажные, необходимо ссылаться при цитировании. ГОСТ 7.0.5–2008 разъясняет, как организованы ссылки на электронные издания. Ориентируясь на требования, сформулированные в ГОСТе, можно предложить следующий вид ссылки на статью, опубликованную в электронном журнале «Полином»:

Иванов И.И. К вопросу о преподавании математики [Электронный ресурс] // Полином. 2009. № 1. С. 2–8. URL: http://www.mathedu.ru/polinom/polinom2009-1.pdf (дата обращения: 12.01.2009).

Полином

Научно-методический журнал
№ 1/2009

Выходит 4 раза в год

Учредитель и редактор
В. М. Бусев

Художник
О. П. Богомолова

Издание зарегистрировано в Федеральной службе по надзору в сфере связи и массовых коммуникаций Российской Федерации
Эл. № ФС77-34064

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора

Из истории просвещения

Кондратьева Г.В. Репетиторство в XIX веке
Репетиторство — явление не новое. До революции практика частных уроков была достаточно распространенной. Кто и зачем шел в репетиторы? Как проходили частные уроки? Чем была обусловлена популярность репетиторства? — Обо всем этом рассказано в статье **4–9** ▶

Полякова Т.С. Периодизация истории отечественного математического образования
Работа историка предполагает не только обнаружение и анализ фактов, но и расположение их в той последовательности, в которой они располагались будучи фактами действительности. Систематизация, объединение фактов в группы имеют важное значение для лучшего понимания истории. В статье рассмотрены важнейшие события в истории математического образования, выделены основные ее эпохи и периоды **10–17** ▶

Колягин Ю.М., Саввина О.А. Обзор архивных документов из личного фонда профессора Николая Васильевича Бугаева
Н.В. Бугаев — известный дореволюционный математик и философ, шахматист и автор гимназических учебников. Имя его до недавнего времени было практически забыто: «единственно правильное» учение не могло потерпеть рядом «реакционного философа». Авторы статьи, имевшие возможность работать с личным архивом Н.В. Бугаева, знакомят с его содержанием всех заинтересованных в изучении наследия ученого **18–21** ▶

Живая история

Шноль Э.Э. Мой учитель — И.М. Гельфанд
Воспоминания об учебе в Московском университете 1940—1950-х гг., о научных контактах с известным математиком И.М. Гельфандом, о совместной с ним работе над книжкой «Функции и графики» для заочной математической школы **22–27** ▶

Чехов А.П. Репетитор
В продолжение темы репетиторства в XIX веке — рассказ А.П. Чехова **28–29** ▶

Вокруг математики

Шабат Г.Б., Сгибнев А.И. Простые делители оберквадратов
Оберквадраты — это натуральные числа вида $n^2 + 1$. В статье устанавливается, какой вид имеют простые делители оберквадратов. Оказывается, переход в область конечных полей позволяет доказать гипотезу о виде делителей **30–36** ▶

Учим математике

Ройтберг М.А. Игра в полоску
Правила этой игры очень просты, а играть в нее интересно и детям, и взрослым. При этом за игровым сюжетом скрывается настоящая математика. Автор показывает, как организовать работу с детьми так, чтобы они получили максимум для своего развития **37–46** ▶

Самохвалов П.А. Введение понятия несоизмеримости в V классе
Общеизвестны трудности введения иррациональных чисел. Автор, дореволюционный педагог, предложил свой способ решения этой непростой проблемы **47–51** ▶

Медведев К.В. Опыт фронтального ведения курсовых работ школьников
В статье рассказывается об эксперименте по активизации исследовательской деятельности школьников, который автор проводил в лицее «Вторая школа» **52–54** ▶

Нетрусова Н.М. Организация исследовательской деятельности школьников в школе “Интеллектуал”
В статье описан опыт школы «Интеллектуал» по вовлечению учащихся в исследовательскую детяельность. В приложении к статье дана памятка школьникам, которые готовят доклад для конференции **55–58** ▶

Размышления

Фирсов В.В. Методика обучения математике как научная дисциплина
Автор доказывает, что методика обучения математике является наукой, обращает внимание на характерные особенности этой науки и формулирует некоторые практические рекомендации, адресованные теоретикам и практикам математического образования **59–67** ▶

Дискуссия

Бусев В.М. Новые педагогические культы и будущее школьной математики
В статье рассматриваются некоторые популярные ныне педагогические течения — метод проектов, продуктивное обучение и компетентностный подход в образовании. Показано, как они соотносятся с обучением математике, к чему может привести внедрение обсуждаемых идей в практику работы массовой школы **68–84** ▶

Математики-педагоги

Бусев В.М. Методист-математик Дмитрий Лукич Волковский (к 140-летию со дня рождения)
Главное содержание статьи составляет автобиография известного методиста арифметики, обнаруженная автором в Научном архиве Российской академии образования. Публикация документа предваряется введением; в заключении кратко рассказано о последних годах жизни методиста, даны ссылки на литературу **85–92** ▶

Обзор книг, статей, электронных ресурсов

Бусев В.М. О пермском журнале по математике для школьников 93–94 ▶

Бусев В.М. Труды семинара по истории детства 95–97 ▶

События

Сгибнев А.И., Нетрусова Н.М. О работе семинара учебно-исследовательских работ школьников по математике **98–106**

Информация

Семинар учебно-исследовательских работ школьников по математике **107–108**

Конференция в Российском университете дружбы народов **108–109**

Конференция в Тольяттинском государственном университете **109–110**

От редактора

Вот и сверстан первый номер журнала «Полином». То, что еще несколько месяцев назад казалось далеким, стало близким. Общие соображения претворились в конкретные дела: разработан макет, созданы заставки и обложка, проведена работа с авторами и членами редколлегии, отредактированы первые статьи.

Делать журнал, пусть и электронный, оказалось сложнее, чем я думал. Требуется быть одновременно редактором, техническим редактором, корректором, верстальщиком... Хотя я старался, какие-то вещи наверняка получились не очень хорошо: нельзя в одиночку и сразу создать с нуля журнал, который был бы идеален. Надеюсь, что отклики всех заинтересованных лиц помогут журналу стать лучше. Замечания и пожелания можно присылать на адрес редактора vbusev@yandex.ru.

Удалось ли сделать главное — сделать номер интересным? Не знаю. Мне было интересно читать статьи, которые в него вошли. Надеюсь, будет интересно и остальным читателям. Одного выполнить не удалось — найти статью в рубрику «Из истории математики». Хочется, чтобы в будущих номерах эта рубрика не пустовала.

Многие статьи, помещенные в номере, были в свое время опубликованы в бумажных изданиях. Однако прежде чем быть помещенными в журнал, почти все они подверглись переработке, поэтому источник, откуда взят материал, не указан.

Довольно много материалов написано для номера редактором. Надеюсь, это будет исключением, а не правилом.

Второй номер журнала «Полином» планируется частично посвятить педагогическому образованию. В связи с этим я обращаюсь с просьбой ко всем, кто имеет к нему отношение, высказаться на страницах журнала. Сформулирую направления, которые представляются интересными:

- Постановка курсов методики математики и элементарной математики;
- Профессиональная направленность преподавания курсов высшей математики (связь со школьной математикой);
- Болонский процесс и математическое образование будущих педагогов;
- Исторические аспекты подготовки учителей математики (особенно интересен период реформирования 1970-х гг. и последствия этого реформирования);
- Воспоминания о студенческих годах, очерки о преподавателях педагогических вузов.

Срок подачи статей — **до 20 марта 2009 г.**

Из истории просвещения

Репетиторство в XIX веке

КОНДРАТЬЕВА Галина Вячеславовна
доцент кафедры геометрии
Московского государственного
областного университета
kondratevagv@mail.ru

Введение

Широко распространенная сегодня практика репетиторства вызывает противоречивое отношение у общественности. Критики отмечают, что репетиторство создает и закрепляет социальное неравенство, поглощает человеческие и финансовые ресурсы. Утверждается даже, что репетиторство — это одна из форм коррупции: нередко деньги, получаемые за уроки, представляют собой плату за неофициальную помощь в получении более высоких отметок при обучении в школе и на вступительных экзаменах в вузы. Сторонники же репетиторства видят в нем механизм, помогающий учащимся расширить свои знания, а учителям — индивидуализировать обучение.

Необходимо отметить, что внимание к явлению репетиторства обусловлено, прежде всего, значительным расширением практики частных уроков в последние десятилетия. Действительно, было время, когда репетиторство вообще не признавалось советской педагогикой. Считалось, что учителя оказывают помощь неуспевающим учащимся в школе бесплатно. Однако нельзя безапелляционно утверждать, что репетиторство в СССР не имело места. Учителя, подрабатывающие уроками, как правило, не склонны были афишировать свои побочные доходы; учащиеся и их родители предпочитали не распространяться о таких уроках. Речь может идти скорее не об отсутствии данного явления, а о его масштабах, которые в советскую эпоху явно были весьма ограниченными.

Сегодня репетиторство выросло, пожалуй, в целую отрасль частного предпринимательства, никем неконтролируемую и достаточно прибыльную. Оно развернулось настолько широко, что, очевидно, подлежит тщательному анализу. Но провести глубокое исследование невозможно без изучения истории вопроса. В этой связи было бы полезно обратить внимание на развитие репетиторства в дореволюционной России, когда практика частных уроков поддерживалась государством. Отметим, что преподавание в государственных и негосударственных учебных заведениях широко изучалось историками народного образования; при этом частные уроки, которые давали учителя, как правило, оставались без внимания отечественных исследователей. Цель настоящей статьи — частично восполнить указанный пробел.

Репетиторы, домашние наставники и воспитатели

Слово «репетитор» имело в царской России несколько иной смысл, нежели мы вкладываем в него сегодня. Сегодня репетитор — это преподаватель, дающий частные уроки на дому. В Российской империи первоначально репетитором называли учителя, под наблюдением и руководством которого учащиеся, жившие в интернатах при кадетских корпусах, в Пажеском корпусе и других закрытых учебных заведениях, выполняли домашние задания. Но постепенно репетитором стали называть и учителя, которого нанимали для помощи в подготовке уроков неуспевающим гимназистам.

Современное слово «репетиторство» может быть отнесено к широко распространенному в то время домашнему обучению. Домашнее обучение было в России наряду с обучением в государственных и частных учебных учреждениях одной из возможностей получения образования.

Государство старалось регламентировать и контролировать систему домашнего обучения. В Российской империи существовало законодательство о домашнем обучении, которое устанавливало порядок организации и проведения частных уроков. В нем говорилось:

> «Желающие заниматься частным преподаванием должны получить на это письменное разрешение у инспектора народных училищ, который обязан сведения о таких лицах включать в годовые отчеты, представляемые им в Министерство Народного Просвещения»[1].

Эти правила касались в первую очередь домашних учителей и наставников, которые занимались не только обучением, но и воспитанием детей, и проживали в семьях. Положение о домашних наставниках и учителях от 1 июля 1834 г. достаточно четко оговаривало требования к наставникам и учителям, устанавливало необходимость постоянных ежегодных отчетов и проч. Звание домашнего наставника предоставлялось только лицам, окончившим курс в высших учебных заведениях. Звание домашнего учителя могло предоставляться лицам, не окончившим полного курса, но выдержавшим особые испытания.

---

[1] *Фальбок Г., Чарнолуский В.* Частные училища и домашнее обучение. Систематический свод законов, распоряжений, инструкций и справочных сведений о частных учебных заведениях II и III разрядов, домашнем обучении, училищах Императорского Русского Технического Общества и горнозаводских училищах. СПб., 1903. С. 44.

Впрочем, частные уроки разрешалось давать лицам, не получившим звания домашнего учителя и наставника, но в этом случае они все равно должны были быть аттестованы на право обучать на дому, при этом права и преимущества домашних учителей и наставников на них не распространялись.

Зачем шли в репетиторы

Нередко репетиторство было связано с необходимостью иметь дополнительный заработок. Этот вопрос, болезненный сегодня, был достаточно сложен и в XIX веке:

> «Получая за уроки самое неудовлетворительное вознаграждение, учитель волею-неволею вынужден свыше сил своих заниматься, давать по 35 и даже 40 часовых уроков в неделю... Чтобы учитель был педагогом, чтобы, следовательно, был предан своему призванию, воодушевлялся преподаванием, чтобы много читал, много наблюдал, размышлял, — никак не должен он давать более 25 часовых уроков в неделю, и притом должен получать не менее 2000 руб. в год»[2].

Учитель мог для пополнения своего бюджета одновременно работать в нескольких учебных заведениях. Но место в другом учебном заведении найти было непросто. Приходилось довольствоваться частными уроками, которые давали возможность немного заработать. Современники так оценивали сложившуюся ситуацию:

> «Учителя, получающие оклад крайне недостаточный, изнуряются уроками как почтовая лошадь, не имеют ни покоя, ни досуга, и чуют гораздо чаще кнут на избитых боках, чем сено (об овсе и говорить нечего) в пустом желудке»[3].

И еще о материальных причинах:

> «Неужели мы осудим того учителя, который дает приватные уроки? Сохрани нас Боже! У него жена, куча детей; сам он хочет быть сытым, прилично одеваться и пр. ...Нередко у учителя есть еще и родня, и старики-родители, у которых больше слез, чем хлеба: как же при этом существовать учителю, даже при хорошем жаловании, т.е. в 300–400 руб., если он не хочет жить хуже поденщика? Что же ему остается делать, как не заниматься приватными уроками...?»[4].

Как правило, частные уроки не рассматривались общественностью как престижное занятие. Но существовали уроки, получить которые было не столько доходно, сколько престижно. Это были уроки в известных аристократических фамилиях России. Подобные уроки давали возможность сделать карьеру, получить доступ к «сильным мира сего». Их не скрывали, а, наоборот, тщательно подчеркивали в биографиях.

Например, известный педагог, редактор журнала «Учитель» И.И. Паульсон, гордился тем, что был преподавателем у Великой Княжны Марии Александровны. А его близкий друг Н.Х. Вессель удачно построил карьеру благодаря тому, что поступил наставником в дом князя А.Н. Горчакова. По просьбе князя Вессель представлял ему доклады по вопросам народного образования и стал выдвигаться в общественном мнении как ученый-педагог, широко знакомый с иностранной и русской педагогикой. Затем Н.Х. Вессель был приглашен в состав Педагогического комитета Военного министерства и возглавил редакцию журнала «Педагогический сборник».

---

[2] *Гейлер П.* Геометрия, как необходимое образовательное средство в каждом мужском и женском учебном заведении // Учитель. 1864. № 17. С. 649.
[3] Приватные уроки // Учитель. 1862. № 10. С. 461.
[4] Там же. С. 462.

Кем были репетиторы

Понятно, что приглашения от аристократических семей получали единицы педагогов. Остальные должны были довольствоваться обычными семьями. Впрочем, и здесь сразу найти уроки удавалось не всегда, так как конкуренция была достаточно высокой. Газеты пестрели объявлениями вроде:

> «Учитель желает давать уроки арифметики, немецкого и русского языков. Спросить на углу Почтамтской улицы и Исаакиевской площади, д. Китнера, в кварт. 22»[5].
> «Уроки преподают, французского и английского языков, по 1 руб., по Большой Садовой., д. Кусова № 50, кв. № 13»[6].

Нередко уроки предлагали студенты:

> «Студент, слушающий лекции в духовной академии, берет на себя, за самую умеренную плату, приготовление детей в средние и низшие учебные заведения, равно как и начальное обучение и приготовление к классам. Спросить на митрополитских конюшнях, у надзирателя Боброва». «Студент желает давать уроки по предметам гимназического курса, а также и естественных наук. Спросить на Выборгской стороне, по Сампсониевскому проспекту, в доме Васильева, под № 6»[7].

Уроками подрабатывали и хорошо успевающие гимназисты. Известный пример — А.П. Чехов. Менее известный пример — А.П. Киселев, автор знаменитых учебников, по которым учились многие поколения школьников. А.П. Киселев давал уроки, когда учился в гимназии. Именно на заработанные от уроков деньги, а также на средства от продажи золотой медали юноша смог продолжить обучение в университете.

Не всем молодым репетиторам удавалось совмещать учебу и педагогическую работу. Многие студенты, борясь за хлеб насущный и бегая по урокам, так и не заканчивали курса.

Серьезные педагоги, как правило, не давали объявлений, подобных цитированным выше. Их приглашали по знакомству — обеспеченные семьи предпочитали нанимать для уроков преподавателей с хорошими рекомендациями. Так, например, родители С.В. Ковалевской пригласили по рекомендации для занятий с маленькой Софьей слушателя Морской академии А.Н. Страннолюбского, впоследствии известного педагога-математика. На протяжении трех лет Софья изучала под руководством А.Н. Страннолюбского элементарную и высшую математику. Как видно из ее воспоминаний, она высоко ценила профессиональные и человеческие качества своего учителя. Например, она писала:

> «Был также Страннолюбский, от которого я в восхищении», «Затем пришел Страннолюбский. Я ужасно обрадовалась, увидев его; он очень, очень мил и положительно нравится».
> «Страннолюбский просидел у нас весь вечер. Он вовсе не озлился, когда я сказала ему, что собираюсь, кроме математики, заниматься еще физиологией, анатомией, физикой и химией; напротив, он сам согласился, что одна математика слишком мертва, и советовал не посвящать себя исключительно науке и заняться даже практической деятельностью»[8].

---

[5] Справочный листок журнала «Учитель». 1862. № 4. С. 1.
[6] Справочный листок журнала «Учитель». 1864. № 4. С. 1.
[7] Справочный листок журнала «Учитель». 1862. № 9. С. 1; № 10. С. 1.
[8] Цит. по: *Прудников В.Е.* Русские педагоги-математики XVIII–XIX веков. М.: Учпедгиз, 1956. С. 626.

Нельзя, конечно, сказать, что все учителя были блестящими мастерами своего дела. Нередко частные уроки проходили с малой пользой для ученика. Вот как выглядело такое занятие.

> «Что задано к следующему разу?» — спрашивал репетитор-студент. — «Две задачи по арифметике, перевод и слова по латинскому и придумать десять примеров по русскому». — «Сделал задачи?» — «Нет, пробовал, но не вышли». — «Ну, давай вместе сделаем». Задачи оказались нетрудные, но очень длинные, числа большие, и мальчик постоянно сбивался. Затем шел перевод с латинского. Время шло, и час уже пролетел, а работы еще много. Репетитор начинает торопиться и покрикивать… Мальчик теряется, и ни одного примера на грамматическое правило родного языка не может придумать. Наконец, репетитор сам все примеры говорит и уходит»[9].

Существовало и откровенное пренебрежение своими обязанностями, сочетающееся с желанием побольше заработать.

> «Есть учителя, которые получают от школы достаточное содержание, а между тем независимо от школы имеют еще множество уроков, и при всем том здравы и всегда в прекрасном расположении духа. Это очень просто: им все трын-трава, и потому никакие неприятности и дрязги не беспокоят их; они заставляют детей немножко писать, немножко читать, а об остальном не заботятся. И к чему? Их любят, почитают и им хорошо жить. Подите и делайте то же самое!»[10].

Критика репетиторства

Частные уроки вызывали недовольство у общественности, поскольку им неизбежно сопутствовала несправедливость. И.И. Панаев вспоминал, что во время его обучения наиболее строгие и неумолимые преподаватели становились почти нежными, когда учащийся обращался с просьбой о приватных уроках. И.И. Панаев привел в качестве примера учителя латыни, который, взяв деньги за несколько уроков вперед, сообщил ученику вопросы к экзамену и занятий не проводил, ссылаясь на здоровье[11]. Гонорар учителя составил при этом 150 руб. — значительная по тем временам сумма.

Особое недовольство практика приватных уроков породила у общественности в 70–80-х гг. XIX в. после реформ графа Д.А. Толстого. Программа гимназий была тогда усложнена, причем древние языки занимали 45% учебного времени. Современники считали, что освоение гимназической программы посильно только либо необычайно талантливым ученикам, либо богатым, потому что последние могут пользоваться частными уроками — доходной статьей гимназических учителей[12].

Учителя также были критически настроены к репетиторству и указывали на негативные стороны индивидуального обучения. Известный педагог В.А. Евтушевский писал:

---

[9] *Матвеев.* Характеристики учеников // Русская школа. 1893. № 2. С. 90.
[10] Приватные уроки // Учитель. 1862. № 10. С. 461.
[11] См.: *Панаев И.И.* Литературные воспоминания. М., 1950.
[12] Подробнее см.: *Цебрикова М.К.* Письмо к Александру III. СПб., 1906.

> «При одиночном воспитании и обучении... замечается отсутствие выработки в воспитанниках характера и правильно направляемой воли... замечается развитие дурных привычек. При одиночном воспитании гораздо чаще воспитанник управляет воспитателем, а не наоборот... Дети, обучающиеся в одиночку, обыкновенно отличаются недостатком естественной резвости и подвижности.... Нет примера в товарищах, настойчивым трудом одолевающих ту или иную трудность; нет интереса и возбуждения в работе, которые значительно поддерживают соревнованием при совместном обучении нескольких детей. Вместо душевной крепости является детский деспотизм, своеволие, беспричинная гордость и расслабление чувства долга»[13].

Некоторые педагоги оценивали практику приватных уроков более резко:

> «Кому даются приватные уроки? По большей части тем негодям, которые при помощи этих уроков в кратчайший срок должны успеть в том, в чем не могли успеть в школе. А в случае неуспеха кто виноват? Разумеется, учитель, потому что он получает дорогую плату. При таких обстоятельствах неудивительно, что учителя, дающие приватные уроки, становятся чрезвычайно плохими учителями, тогда как они должны совершенствоваться помощью преподавания»[14].

Заключение

Так почему же, несмотря на многочисленные непривлекательные стороны, репетиторство процветало? Можно много говорить на эту тему, но лучше привести весьма распространенную для дореволюционной России историю типичного гимназиста. Учеба давалась ему тяжело, и речь уже шла об отчислении за неуспеваемость. Родители наняли сыну репетитора.

> «С тех пор как стал приходить репетитор, дела... пошли лучше... Родители пригласили репетитора к сыну и на каникулярное время, чтобы пройти с мальчиком несколько вперед из курса третьего класса, и тем самым облегчить занятия ему зимой... Начиная с четвертого класса, ...твердо шел без репетитора в ряду удовлетворительных по успеху учеников; все трудности курса преодолел и выдержал экзамен на аттестат зрелости»[15].

Таким образом, репетиторство давало возможность громадной массе гимназистов окончить гимназию. Как и сегодня, репетиторство было порождено неэффективностью системы среднего школьного образования: отсутствием индивидуального подхода к учащимся, несовершенством методов обучения. Не последнюю роль в популярности репетиторства тогда сыграла школьная программа, которая была перегружена.

◀ **Вернуться к содержанию**

[13] *Евтушевский В.* Проект устройства домашних школ // Семья и школа. 1874. Кн. 2. № 4. С. 294–296.
[14] Приватные уроки // Учитель. 1862. № 10. С. 461.
[15] *Матвеев.* Характеристики учеников // Русская школа. 1893. № 2. С. 90.

Периодизация истории отечественного математического образования

ПОЛЯКОВА Татьяна Сергеевна
зав. кафедрой геометрии
и методики преподавания математики
Педагогического института
Южного федерального университета
tsp@mail15.com

В истории математического образования, как и в любой истории, одной из основных задач исследователя является выделение периодов ее развития. Нами был предложен один из вариантов периодизации истории отечественного школьного математического образования [7, с. 13], построенный по линейному принципу. Однако такая периодизация не очень удобна. Для эффективного изучения истории необходимо выделять не только периоды, но и эпохи[1], включающие эти периоды, а также этапы[2] внутри периодов (причем этапы тоже могут делиться).

В истории отечественного школьного математического образования, по нашему мнению, можно выделить *четыре эпохи*, связанные с различными фазами российской государственности. Внутри каждой из эпох можно выделить *периоды*. Начало каждого из периодов характеризуется наличием комплекса математических, педагогических и методических идей, предопределяющих основные процессы, которые будут происходить в математическом образовании на протяжении всего периода. Период заканчивается, когда математическое образование переходит в новое качественное состояние. В свою очередь внутри каждого периода выделяются *этапы*, каждый из которых характеризуется не столь кардинальными изменениями.

Не будучи сторонниками периодизации специальной ветви истории по имени правителей или в соответствии с государственным устройством, мы все же не можем не учитывать влияния времени на математическое образование. Образовательная политика государства и/или властной элиты во многом определяла характерные черты математического образования, его вес и значение в общей системе образования, если она к тому времени уже сложилась.

Самый яркий пример — время Петра I, который не только создал систему профессионального светского государственного образования, но и придал ей выраженный математический характер, что отражено даже в названиях созданных по его инициативе и при его участии школ — «математико-навигацкая», «цифирные». Заметим, что светский характер школы, ее профессиональная ориентация и государственный патронат знаменуют абсолютно новаторский для того времени подход к созданию образовательной системы.

---

[1] Эпоха — «период времени в развитии природы, общества, науки и т.п., имеющий какие-л. характерные особенности» [10, с. 722].

[2] Под этапом мы понимаем «отдельный момент, стадию какого-нибудь процесса» [6, с. 901] в отличие от периода — «промежутка времени, в течение которого что-нибудь происходит (начинается, развивается и заканчивается)» [там же, с. 503].

Итак, нами выделены следующие *базовые эпохи* истории отечественного школьного математического образования:

1) допетровская эпоха развития математического образования;
2) эпоха развития математического образования в рамках Российской империи;
3) советская эпоха истории школьного математического образования;
4) современная эпоха развития математического образования.

Допетровская эпоха развития математического образования

Первая базовая эпоха истории развития отечественного математического образования включает лишь один период, который назван нами периодом *зарождения математического образования.* Он начался во времена Киевской и Новгородской Руси (X–XI вв.) и закончился в XVII в. Этот период имеет латентный характер, проявляясь в редких сохранившихся продуктах человеческой деятельности, связанных с математическим образованием. В основном это письменные источники, лишь косвенно подтверждающие наличие обучения математике в то или иное время, но оставляющие скрытыми информацию об институтах, формах и методах математического образования. Содержание обучения в конце периода (XVII в.) перестает быть латентным: сохранились многочисленные рукописные учебники математики (в основном арифметики).

Эпоха развития математического образования в рамках Российской империи

Вторая базовая эпоха (XVIII – начало XX вв.) включает три периода.

Первый – *становление отечественного математического образования* – охватывает весь XVIII в. Он начинается с указа Петра I об основании Математико-навигацкой школы (1701) и кончается реформами образовательной системы России (1804). Основные характеристики первого периода – встроенность математического образования во все локальные образовательные системы, в большинстве из которых оно играло заметную роль; нерасчлененность обучения на возрастные или содержательные ступени. Вместе с тем в это время вызревают основы как начального, так и среднего и высшего математического образования. В этот период были заложены патерналистские традиции отечественного математического образования как со стороны государства, так и со стороны математики как науки. Патронат науки проявился в функционировании методической школы Эйлера, во многом предопределившей дальнейшее развитие математического образования в России.

Второй период – *создание российской модели так называемой классической системы школьного математического образования* в качестве подсистемы гимназической образовательной системы. Он начался образовательными реформами 1804 г. и завершился во второй половине XIX в. Классическая система школьного математического образования носила международный характер. Ей была присуща четкая дифференциация: на возрастные уровни (начальное, среднее и высшее математическое образование) и на содержательные уровни (в начальной и средней школе изучалась элементарная математика, в высшей – высшая математика).

Третий период — *движение за реформацию классической системы школьного математического образования*. Он предварялся в 60–70-е гг. XIX в. «широкими научными изысканиями в области проблем математического образования» [11, с. 73], осознанием основных дефектов его классической системы в конце XIX — начале XX в. и частичным внедрением в школьное обучение математике новых идей (методическая модернизация систематического курса арифметики, введение функциональных идей, элементов высшей математики, реконструкция курса геометрии на основе идеи движения и др.). Апофеозом реформаторских настроений стали Всероссийские съезды преподавателей математики (1911–1914 гг.), на которых велась дискуссия по назревшим проблемам школьного математического образования. Процессы реформации в России были неотъемлемой частью международного реформаторского движения. Деятельность по реформированию обучения математике практически сошла на нет в связи с революцией в России 1917 г., и период реформации конца XIX — начала XX вв. завершился.

Советская эпоха развития математического образования

Третья базовая эпоха истории отечественного математического образования (1918–1991-92 гг.) включает в себя четыре периода.

Первый — *поиск* (в основном неудачный) *новых моделей математического образования*, в практическом плане сопровождавшийся позитивным процессом «ликвидации математической безграмотности». Он начался изданием ВЦИК «Положения о единой трудовой школе РСФСР» (1918), которое утверждало единую систему образования, общее обязательное бесплатное обучение. В 20-х гг. школьное математическое образование подвергалось не всегда продуманным новациям. Вначале Наркомпрос издал примерные программы, в которых была предпринята попытка модернизации школьного курса в духе реформистских идей начала века, практически неосуществимых в тех условиях. Затем было введено комплексное преподавание, предполагавшее отказ от систематического изучения основ наук, в том числе математики. Это влияло на качество программ и учебников: программы подвергались механической «разгрузке», исключению сложных разделов, учебники предельно упрощались. Наконец, в конце 20-х гг. распространение получили бригадно-лабораторный метод и метод проектов. Эти новации не получили признания среди большинства учителей математики, существенно снизили уровень математической подготовки выпускников школы. Возникла настоятельная потребность решительного изменения содержания и методов обучения (в том числе, математике), которая нашла официальное отражение в постановлении ЦК ВКП(б) «О начальной и средней школе» (1931). Этим и завершился период становления постреволюционной школы и сопровождавший его поиск новых, преимущественно неудачных моделей математического образования.

Второй период — *реставрация отечественных традиций, создание советской модели классического школьного математического образования*. Он начался в 1931 г. уже упомянутым постановлением, восстанавливавшим предметное преподавание основ наук, стабильные программы, в том числе по математике. Вводились и стабильные учебники, преимущественно в виде откорректированных учебников математики дореволюционной школы. Реставрация отечественных традиций школьного математического образования наиболее отчетливо проявилась на Всероссийском совещании по вопросам преподавания математики (1935) и в планах проведения III Всероссийского съезда преподавателей математики, который не состоялся в связи с Великой Отечественной войной.

В 40–50-е гг. XX в. советская модель классического школьного математического образования совершенствовалась и стала достаточно эффективной, о чем говорит хотя бы то, что одной из важнейших причин успехов советской науки и техники (апогей – начало космических проектов) признана советская модель образования, в которой ведущие позиции занимало обучение математике. Однако ресурс классической системы математического образования к 60-м гг. был исчерпан: школьная математика все более отдалялась от современной математики, не была связана с бурно развивающейся информатикой и вычислительной техникой, обучение не учитывало новейших достижений педагогики и психологии. Поэтому в конце 40-х гг. возобновилась работа по созданию проектов новых школьных программ по математике, которая продолжалась в течение всего характеризуемого периода.

Третий период – *реформация советской модели классической системы школьного математического образования* – формально начался в 1964 г. совещанием по проблемам школьного математического образования под эгидой Министерства просвещения РСФСР, на котором основной доклад сделал академик А.Н. Колмогоров. Начиная с 1968 г. в школу вводились новые программы по математике, основой которых явились теоретико-множественные представления и идея отображения; в старших классах были введены элементы математического анализа, факультативные курсы математики. В кратчайшие сроки были подготовлены новые учебники математики. Основным дефектом реформы явилась чрезмерная поспешность подготовки и введения новых программ и учебников, фактическое отсутствие их экспериментальной проверки.

Четвертый период истории математического образования в рамках советской образовательной системы – *период контрреформации*. В 1979–1980 гг. в печати появилась резкая критика проведенной реформы. Была образована комиссия по математическому образованию при Институте математики АН СССР, которую возглавил академик Л.С. Понтрягин. На основе рекомендаций этой комиссии были срочно пересмотрены школьные программы по математике, изъяты из обращения «колмогоровские» учебники геометрии, внесены существенные коррективы в другие учебники математики. С 1982 г. в школу вводились новые или переизданные с существенными коррективами учебники. Эти процессы не только приостановили прогрессивные тенденции развития школьного математического образования, обозначившиеся еще в начале века, но и во многом были движением вспять. Контрреформация все же не носила тотального характера: в школьном курсе математики сохранились начала математического анализа, векторы, идеи функции и движения, однако трактовка ряда фундаментальных математических понятий приняла зачастую недопустимо архаичную форму, частично сохранившуюся и поныне.

Современная эпоха развития математического образования

Современная эпоха развития школьного математического образования началась в 1991–1992 гг. Она характеризуется кардинальными изменениями, связанными с отказом от концепции единообразия отечественной школы, что привело к распаду образовательной моносистемы советского периода. Современная система образования отличается от советской прежде всего вариативностью. Это актуализирует, с одной стороны, проблему стандартов математического образования, определяющих общее ядро содержания обучения, а с другой стороны, проблему разнообразия технологий обучения математике, так как в различных образовательных системах, естественно, доминируют и различные технологии. В настоящее время на передний план выходят проблемы профилизации школьного образования.

Этапы периода зарождения математического образования

Как говорилось ранее, каждый из названных периодов истории отечественного математического образования в свою очередь делится на этапы. Рассмотрим, на какие этапы делится период зарождения математического образования (X–XVII вв.), предприняв попытку реконструкции образовательной ситуации на Руси в целом и в сфере математического образования, в частности.

Первый этап связан с расцветом культуры Киевской и Новгородской Руси в X–XII вв. Киевская Русь, или «империя Рюриковичей», в X–XI вв. достигла высшей степени могущества и культурного расцвета. В это время определяющими были ее отношения с Византией, откуда на Русь перешли «...начала умственной и литературной деятельности» [4, с. 9]. Одним из самых мощных стимулов развития Киевской Руси являлось введение единой письменности: с принятием христианства на Русь перенесена единая система алфавита (кириллица), на которой основывалась и древнеславянская алфавитная десятичная нумерация.

Идея ценности образования впервые была осознана киевским князем Владимиром Святым, крестившим Русь, а затем и его сыном Ярославом Мудрым. Эта идея имела религиозно-православную основу: образование должно было служить, прежде всего, укреплению принятой веры. Поэтому в качестве ведущей модели образования была принята, по всей видимости, духовная: в Киеве, Новгороде и других крупных городах были основаны народные училища для детей священников и светской знати, вероятнее всего, в виде приходских и монастырских школ, которые явились первыми образовательными институтами Руси. Идея ценности образования не была поддержана широкими слоями населения, поэтому обучение в училищах было часто принудительным, что, однако, не помешало формированию первого на Руси поколения образованных людей.

Некоторые представления о качестве математического образования можно получить с помощью сохранившихся литературных источников, среди которых главными являются юридический сборник Ярослава Мудрого «Правда Русская» [8] и первое отечественное математическое сочинение монаха Кирика [5].

Законы существовали и до Ярослава Мудрого, но он «может быть, отменил некоторые, исправил другие, и первый издал законы письменные на языке славянском» [3, с. 132]. «Правда Русская» включает значительное количество статей, в которых приводятся математические расчеты. Часть из них достаточно сложна для того времени (вычисление процентов, определение площадей земельных участков, приплода от скота и др.). Так как юридический сборник имел широкое распространение, надо полагать, что образованная часть общества Руси в XI в. обладала достаточно высоким уровнем математической культуры, чтобы не только понимать изложенные в нем законы, но и претворять их в жизнь.

Наивысший уровень развития математики и математического образования этого периода представлен в математико-хронологическом сочинении первого отечественного ученого начала XII в. Кирика Новгородца «Наставление, как человеку познать счисление лет». Оно, как предполагают, носило «диссертационный» характер и содержало достаточно грамотные математико-хронологические расчеты и даже пример геометрической прогрессии со знаменателем 5, аналоги которой отсутствуют в мировой математической литературе.

Так как первой образовательной системой Руси была духовная образовательная система, математическое образование на этом этапе носило, скорее всего, подчиненный характер и преследовало утилитарные цели. Содержание его, по-видимому, ограничивалось элементарными сведениями из практической геометрии, а также начатками арифметики, в основе которой лежала самобытная древнеславянская алфавитная десятичная непозиционная система счисления.

Итак, в X–XII вв. на Руси была в основном принята идея ценности образования, функционировали первые образовательные институты, качество математического образования было вполне сравнимо с качеством такового у византийских и западноевропейских вычислителей. Этот этап можно с достаточным основанием характеризовать как этап расцвета.

Второй этап развития математического образования на Руси в период его зарождения совпадает с татаро-монгольским нашествием и имеет хронологические границы XIII–XIV вв. Его можно охарактеризовать как этап упадка: вместе с общим падением культуры и нравственности катастрофически деградирует образованность во всех слоях общества, школы практически прекращают свое существование. Высочайшая культура Древней Руси сохранилась только в Новгороде, который почти не был затронут татаро-монгольским нашествием. Уровень грамотности среди населения был там поразительно высок для своего времени, о чем свидетельствует сенсационное археологическое открытие середины XX в. — новгородские берестяные грамоты. Среди них обнаружены так называемые «цифровые алфавиты» [9, с. 80], которые служили для изучения нумерации (первые в истории Руси учебные пособия по математике), а также грамоты, содержащие упражнения на написание чисел на бересте.

Крайне негативные процессы происходили в ранее наиболее образованном слое общества — духовенстве: уровень его образованности падал, грамотных людей хронически не хватало даже для посвящения в сан. Более того, начиная с XV в., духовенство стало яростным врагом распространения математической культуры, практически запретив математические книги.

Третий этап периода зарождения математического образования связан с укреплением могущества Московской Руси и хронологически ограничен XV–XVII вв. Его можно характеризовать как время пробуждения математической культуры и образования. Несмотря на сохраняющиеся церковные запреты, появляются крупные литературные произведения научно-просветительского характера, в которых имеются и некоторые математические сведения. Геометрия и арифметика широко используются в практической деятельности, искусстве [7, с. 33–37]. Образовательная ситуация, в том числе в сфере математического образования, постепенно менялась: идея ценности образования начала возрождаться, прежде всего, среди духовенства, которое остро нуждалось в грамотных людях; все большую роль в развитии просвещения играли монастыри — при них создавались такие образовательные институты, как библиотеки, школы.

Тот факт, что в качестве основной возрождалась духовная модель образования, подтверждается открытием в 1639 г. первого высшего учебного заведения России — Киево-Могилянской коллегии (позже Академии). «В России, как и в других странах, потребность в высшем образовании получила удовлетворение раньше, чем потребность в среднем или низшем образовании» [2, с. 382]. Математическое образование постепенно выходит из латентного состояния: имеются вполне достоверные сведения об изучении в выпускном классе Академии арифметики и элементов геометрии. Открывшаяся позже в Москве «заиконоспасская школа» (в будущем — Славяно-греко-латинская Академия) была сугубо духовным учебным заведением, математика в ней не изучалась. Отношение к математике в первых высших учебных заведениях Руси говорит о том, что в духовной образовательной системе сохранились рудименты негативной оценки математической культуры: математическое образование в ней игнорировалось, либо носило вспомогательный, подчиненный, утилитарный характер.

За пределами духовной образовательной системы математическое образование в XVII в. функционировало уже достаточно интенсивно, формы его сохраняют латентность: вероятно, это семейное образование, различные виды профессионального образования, индивидуальное самообучение, некоторые типы школ (частные, государственные, монастырские), сведения о которых история не сохранила [7, с. 77]. Свидетельством развития обучения математике является значительное количество математических рукописей XVII в., подавляющее большинство которых носит характер учебных пособий.

Среди них доминируют арифметические рукописи, основное содержание которых восходит к одному или нескольким прототипам преимущественно западноевропейского происхождения [12, с. 24]. Математическое содержание их таково: нумерация, правила действий с целыми числами и дробями, инструментальный счет, правила коммерческой и элементы занимательной арифметики. Важнейшим позитивным результатом общекультурного значения стало распространение на Руси с помощью арифметических рукописей индо-арабской десятичной позиционной системы счисления.

Изложение арифметики велось догматически: готовые правила заучивались без всякого обоснования, а затем применялись к решению аналогичных задач. В качестве основных методов решения задач применялись тройное правило, правило ложного положения и метод сведения к единице. Основным вычислительным инструментом были русские счеты. В старинных арифметиках учитывались национальные запросы и традиции [7, с. 60–61]: использовалась русская система мер, задачи имели преимущественно отечественную фабулу. Уровень арифметических руководств в основном отвечал европейскому.

Иначе обстояло дело с геометрией. Геометрические сведения в небольшом количестве сосредоточены в арифметических рукописях и нескольких рукописях прикладного характера, в которых геометрия служит средством решения практических задач. Приведенные правила их решения часто неточны, а иногда и неверны, теоретические обоснования отсутствуют. Только две рукописи посвящены исключительно геометрии. Одна из них является учебником практической геометрии, в котором приведены вполне достоверные сведения об измерении расстояний и площадей, задачи на построение и преобразование фигур в равновеликие. Рассмотрение этих рукописных материалов позволяет сделать вывод о крайне низком качестве геометрических руководств, значительно уступающем европейскому [7, с. 67].

Этому выводу противоречит геометрическая рукопись «Синодальная № 42» [1], которая занимает особое место в истории отечественного математического образования. Это учебник геометрии, созданный по заказу государя Михаила Федоровича князем Иваном Елизарьевым. В нем впервые на русском языке дано систематическое изложение геометрии в соответствии с новейшими для той поры западноевропейскими методическими идеями. Он содержит определения геометрических фигур, теоремы с чертежами и элементами обоснований, решения задач на построение и вычисление. Учебник не был напечатан и, вероятно, не оказал влияния на развитие математического образования, но, опередив более чем на столетие свое время, явился индикатором появления на Руси в XVII в. тончайшей прослойки высокообразованных людей, не только интересовавшихся математикой, но и способствовавших распространению математических знаний [7, с. 74].

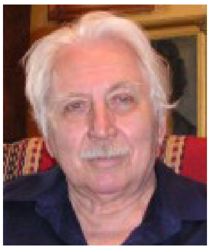
В XVII в. идея ценности образования впервые со времен Киевской Руси начинает осознаваться высшим руководством страны, но у последнего не хватало политической воли для решительного изменения образовательной ситуации в России (Борис Годунов имел намерение открыть школы и даже университеты, но не осуществил его; Михаил Романов заказал наисовременнейший учебник геометрии, но не способствовал его напечатанию). Такого рода политическая воля в полной мере оказалась присуща Петру I, который и предопределил развитие математического образования следующего периода — периода становления, входящего в эпоху истории развития математического образования в рамках Российской империи.

Литература и источники

1. *Белый Ю.А., Швецов К.И.* Об одной русской геометрической рукописи первой четверти XVII в. // Историко-математические исследования. М., 1959. Вып. 12.
2. *Брокгауз Ф.А., Ефрон И.А.* Энциклопедический словарь «Россия». СПб., 1898.
3. *Карамзин Н.М.* Предания веков: Сказания, легенды, рассказы из «Истории государства Российского». М.: Правда, 1989.
4. *Костомаров Н.И.* Русская история в жизнеописаниях ее главнейших деятелей: В 2-х кн. Кн. 1. Вып. 1. М., 1995.
5. Наставление, как человеку познать счисление лет // Историко-математические исследования. М., 1952. Вып. 6.
6. *Ожегов С.И., Шведова Н.Ю.* Толковый словарь русского языка. М.: АЗЪ, 1994.
7. *Полякова Т.С.* История отечественного школьного математического образования. Два века: Кн. 1. Ростов-н/Д: Изд-во Ростовского педуниверситета, 1997.
8. Правда русская / Под ред. Б.Д. Грекова. М.: Изд-во АН СССР, 1947.
9. *Симонов Р.А.* «Цифровые алфавиты» и состояние грамотности в Древней Руси // Математика в школе. 1974. № 1. С. 80–82.
10. Современный словарь иностранных слов. М.: Русский язык, 1993.
11. *Черкасов Р.С.* Отечественные традиции и современные тенденции в развитии школьного математического образования // Математика в школе. 1993. № 4. С. 73–77.
12. *Юшкевич А.П.* История математики в России. М.: Наука, 1968.

Вернуться к содержанию

Обзор архивных документов из личного фонда профессора Николая Васильевича Бугаева



КОЛЯГИН Юрий Михайлович
академик Российской
академии образования
kolyagin-u@mtu-net.ru

САВВИНА Ольга Алексеевна
зав. кафедрой математического
анализа и элементарной математики
Елецкого государственного
университета им. И.А. Бунина
oas5@mail.ru

Николай Васильевич Бугаев (1837–1903) – удивительная и многогранная личность, математик, философ, общественный деятель, педагог и блестящий шахматист. Среди его учеников – В.Г. Алексеев, К.А. Андреев, П.А. Некрасов, П.А. Флоренский и др. Им восхищались Л.Н. Толстой, И.С. Тургенев, П.И. Чайковский и другие его современники – представители русской интеллектуальной элиты рубежа XIX–XX вв. Он явился основателем уникальной философско-математической школы, которая стала основой образовавшейся в дальнейшем Московской математической школы. По учебникам арифметики Н.В. Бугаева [1, 2, 3] учились гимназисты в 1870–1890-х гг. [7], а сам ученый принимал деятельное участие в обсуждении и решении проблем как средней, так и высшей школы (например, участвовал в работе совещания по вопросам о средней школе, проходившем в Московском учебном округе в 1899 г.).

Так случилось, что личность Н.В. Бугаева долгое время оставалась тайной за семью печатями, да и в настоящее время его наследие в области методологии математики и ее преподавания еще совершенно не изучено и не осмыслено. Имя ученого пробивалось к нам непросто и даже до сих пор все еще пробивается. Долгое время о Н.В. Бугаеве упоминали лишь литературоведы, в контексте анализа творчества его сына – Андрея Белого. В 1948 г. фрагментарные сведения о Н.В. Бугаеве привел М.Я. Выгодский [4]. К сожалению, оценки автора этой статьи носят предвзятый характер, поскольку его мировоззренческие взгляды соответствовали духу того времени и, соответственно, диссонировали с «идеалистическими» взглядами Н.В. Бугаева. Небольшое внимание характеристике математических трудов Н.В. Бугаева уделил А.П. Юшкевич [12]. Лишь только с 1980-х гг. благодаря работам С.С. Демидова и др. (см., например, [5, 6, 11]) Н.В. Бугаев открылся нам как математик и философ.

Сегодня мы получили уникальную возможность – изучить наследие Н.В. Бугаева практически всесторонне. Этому во многом способствует тот факт, что в 2006–2007 гг. (т.е. более чем через 100 лет после смерти ученого) специалисты в области лингвистики и компьютерных технологий Научно-исследовательского вычислительного центра МГУ им. М.В. Ломоносова А.В. Уланова и Н.Т. Тарумова проделали колоссальную работу и упорядочили документы из личного фонда Н.В. Бугаева, хранящегося в Отделе редких книг и рукописей Научной библиотеки МГУ [10]. Заметим, что описание фонда было начато еще в конце 50-х годов XX в. (см.: Историко-математические исследования. М., 1959. Вып. 12). Этот фонд в настоящий момент содержит 437 единиц хранения, среди которых студенческие тетради Н.В. Бугаева (ед.хр. 9–30), его конспекты по математике, механике, оптике, астрономии и геодезии (ед.хр. 31–152); материалы, связанные с работой Н.В. Бугаева деканом физико-математического факультета (ед.хр. 153–180а); семейная и научная переписка (ед.хр. 303–391) и многое другое.

Этот фонд — настоящий кладезь редких и интересных материалов для исследователей наследия ученого. Здесь можно найти новые факты не только о жизни, деятельности, взглядах Н.В. Бугаева, но и любопытные сведения о событиях, произошедших в этот период в образовании в России.

Опись фонда имеет следующую структуру:

I. Личные документы.

II. Физико-математический раздел.

III. Астрономия и геодезия.

IV. Материалы по работе Н.В. Бугаева деканом физико-математического факультета.

V. Материалы по вопросам развития и реформы средней школы.

VI. Работы Н.В. Бугаева, не вошедшие по тематике в основные разделы описи.

VII. Материалы (рукописные и печатные), отложившиеся в фонде.

VIII. Переписка.

На наш взгляд, для исследователей истории математического образования особый интерес представляют документы, которые целесообразно структурировать иначе, объединив их в следующие три раздела:

I. О взглядах Н.В. Бугаева на проблемы начального, среднего и высшего образования.

II. Об учебниках Н.В. Бугаева для средней школы.

III. Содержательная характеристика преподавания математики на физико-математическом факультете Императорского Московского университета.

Рассмотрим обзорно содержание этих разделов.

I. *О взглядах Н.В. Бугаева на проблемы начального, среднего и высшего образования.*

• Записка Н.В. Бугаева по вопросу о начальном образовании с сопроводительным письмом Николаю Павловичу[1] (ед.хр. 183);

• К вопросу о подготовке преподавателей для средних учебных заведений (ед.хр. 186);

• Об особых дополнительных занятиях для слабых учеников (ед.хр. 192);

• К вопросу об университетском преподавании (ед.хр. 180а);

• Ответ Н.В. Бугаева на статью в «Московских ведомостях» по поводу классической системы школьного преподавания (ед.хр. 203).

[1] Боголепову. — *Примеч. авт.*

II. *Об учебниках Н.В. Бугаева для средней школы.*

• Объяснительная записка Н.В. Бугаева при представлении в Ученый комитет Министерства народного просвещения 2-го издания руководства арифметики в 2-х частях (ед.хр. 181);

• Объяснительная записка Н.В. Бугаева Ученому комитету Министерства народного просвещения при представлении в Комитет задачника по арифметике (ед.хр. 194);

• Ответ Н.В. Бугаева автору рецензии на его учебник (ед.хр.198);

• Ответ Н.В. Бугаева на рецензию его учебника алгебры (ед.хр. 199);

• Ответ на рецензию учебника с изложением взглядов на некоторые педагогические вопросы в интересах нашей школы и математического образования (ед.хр. 200);

• Возражение Н.В. Бугаева на рецензию его учебника алгебры (ед.хр. 201);

• Выписка из журнала Ученого комитета Министерства народного просвещения о допущении учебника Н.В. Бугаева «Арифметика» в 2-х частях (2-е изд.) в качестве учебного пособия для средних школ (ед.хр. 210);

• Письмо Павлу Алексеевичу[2] с просьбой разрешить напечатать ответ рецензенту его учебника «Начальная алгебра» (ед.хр. 332).

III. *Содержательная характеристика преподавания математики на физико-математическом факультете Императорского Московского университета.*

• Конспект лекций заслуж. проф. МУ[3] математики Н.Е. Зернова, том в твердом переплете (ед.хр. 18);

• «Чистая математика». Лекции Н.В. Бугаева в записи студента IV курса А. Потемкина. «Теория эллиптических функций», тетрадь (ед.хр. 44);

• Высшая алгебра. Конспект лекций, читанных Н.В. Бугаевым с 15/XI 1866 г. (ед.хр. 47);

• Теория чисел. Курс читался Н.В. Бугаевым в 1866–67 гг., блокнот (ед.хр. 48);

• Задания по математике для студентов (ед.хр. 75);

• Программа преподавания математики (черновик) (ед.хр. 76);

• Конспекты лекций Н.В. Бугаева, составленные студентом IV курса математического факультета А. Кутуковым (без начала) (ед.хр. 77);

• Программа по интегральному исчислению (ед.хр. 153);

• Программы по высшей алгебре и теории вероятностей (ед.хр. 154);

• Программа по математике и механике (ед.хр. 155);

• Расписание лекций на физико-математическом факультете (математическое и естественное отделение) (ед.хр. 168);

• Обозрение преподавания на физико-математическом факультете Императорского Московского университета. Распределение лекций и практических занятий (ед.хр. 176).

---

[2] Скорее всего, адресат — попечитель Московского учебного округа П.А. Капнист. — *Примеч. авт.*
[3] Московского университета. — *Примеч. авт.*

Следует заметить, что большая часть фонда представлена неопубликованными документами, причем нередко плохо сохранившимся и трудно читаемыми. Например, рукопись «Об особых дополнительных занятиях для слабых учеников» (написана карандашом) и рукопись «К вопросу о подготовке преподавателей для средних учебных заведений» (написана чернилами) в настоящий момент не обнаружены среди опубликованных работ Н.В. Бугаева.

Даже такой краткий обзор документов из личного фонда Н.В. Бугаева позволяет утверждать, что сегодня у нас появилась редкая возможность восстановить некоторые факты биографии ученого и подвергнуть реконструкции его философские и методико-математические взгляды. Первую попытку такого рода авторы настоящей статьи и предполагают осуществить в ближайшее время.

Литература и источники

1. *Бугаев Н.В.* Задачник к арифметике целых чисел. М., 1874.

2. *Бугаев Н.В.* Руководство к арифметике. Арифметика дробных чисел. 7-е изд. М., 1893.

3. *Бугаев Н.В.* Руководство к арифметике. Арифметика целых чисел. 10-е изд. М., 1898.

4. *Выгодский М.Я.* Математика и ее деятели в Московском университете 40-х годов XIX века // Историко-математические исследования. М.-Л., 1948. Вып. 1. С. 141–183.

5. *Годин А.Е.* Развитие идей Московской философско-математической школы. 2-е изд. М.: Красный свет, 2006.

6. *Демидов С.С.* Н.В. Бугаев и возникновение московской школы теории функций действительного переменного // Историко-математические исследования. М., 1985. Вып. 29. С. 113–124.

7. *Колягин Ю.М., Саввина О.А., Тарасова О.В.* Русская школа и математическое образование: наша гордость и наша боль. В 3-х частях. Часть I. От древнейших времен до XX века. 3-е изд. Орел, 2007.

8. Научная библиотека им. А.М. Горького Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова. Отдел редких книг и рукописей. Ф. 41. Оп. 1 (ед.хр. 155, 176, 181, 183, 186, 192, 194, 199, 200, 203, 210 и др.).

9. Программы, учебные планы, утвержденные 20 июня 1890 г., мужских гимназий и прогимназий / Сост. П.Е. Горбунов. 3-е изд. М., 1895.

10. *Уланова А.В.* Архивный фонд Николая Васильевича Бугаева в Отделе редких книг и рукописей Научной библиотеки МГУ им. М.В. Ломоносова // Рукописи, редкие издания, архивы. М., 2008. http://bugayeff.narod.ru/ulanova.pdf.

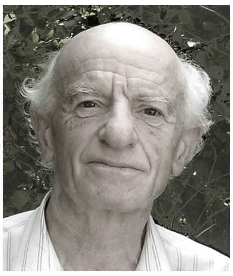
11. *Шапошников В.А.* Философские взгляды Н.В. Бугаева и русская культура XIX–начала XX вв. // Историко-математические исследования. М., 2002. Вып. 7(42). С. 62–91.

12. *Юшкевич А.П.* История математики в России до 1917 г. М.: Наука, 1968.

◀ **Вернуться к содержанию**

Живая история

Мой учитель — И.М. Гельфанд



ШНОЛЬ Эммануил Эльевич
главный научный сотрудник
Института математических проблем биологии РАН
emmanuil_shnol@impb.psn.ru

Я ученик Израиля Моисеевича Гельфанда.

Первая встреча с ним состоялась, когда он читал на нашем курсе линейную алгебру. Он был нашим любимым лектором. Его книжка по линейной алгебре — это обработанные лекции, которые нам читались.

Потом я начал ходить на его семинар — с 4-го курса, это 1946-й год. Гельфанду было чуть больше 30. Семинары Гельфанда продолжались несколько десятилетий, лет 40. Начинались они всегда в одно и то же время — по понедельникам в 19 часов. А оканчивались — в разное время. Участники семинара относились к нему очень серьезно. На моей памяти был случай, когда понедельник был 31 декабря. Кто-то предложил заседание отменить. Но остальные возмутились: «Как это — отменить семинар?», и полноценное (не укороченное) заседание состоялось.

Мы с моим однокурсником Молчановым начали ходить на семинар Гельфанда, и вначале я ничего не понимал. На этом семинаре была такая традиция — разделение присутствующих на две категории: гости и члены семинара. Член семинара имел право задавать вопросы, и пока ему не ответили, доклад не продолжался. Шло обсуждение, пока задавший вопрос не говорил: «Да, мне понятно». А гости таким правом не обладали. Где-то после полугода моего регулярного присутствия меня торжественно приняли в члены семинара.

Еще был такой обычай, что время от времени Гельфанд сам брал слово и что-нибудь рассказывал — популярно, для гостей (гостями могли быть студенты или

И.М. Гельфанд

кто-то еще). Или, если докладчик что-нибудь объяснял заумно, он говорил: «Ну, подождите, сейчас я это расскажу» — и пересказывал вопрос. Довольно много вещей я узнал из этих его рассказов на семинаре. И еще были прогулки после семинаров. Семинар кончался обыкновенно в районе десяти часов вечера. Гельфанд жил тогда на Шаболовке. Бывали случаи, когда мы с ним от старого здания МГУ ходили на Шаболовку пешком и в это время что-то обсуждали. Заряд от этого семинара у меня остался на всю жизнь.

Когда я кончил университет, я был рекомендован в аспирантуру к Гельфанду и должен быть сдавать вступительные экзамены по математике. Экзамен проходил так: была комиссия из нескольких человек и намечаемый руководитель (Израиль Моисеевич присутствовал). В комиссию входил Игорь Ростиславович Шафаревич, который тоже был в то время молод. И он мне задал вопрос: «Что такое риманова поверхность?» Я очень бодро начал, что риманова поверхность — это многообразие, которое локально гомеоморфно плоскости. И на этом кончил. Тогда они вдвоем, Шафаревич и Гельфанд, стали от меня требовать уточнений: «Ну что же, всякая поверхность?» — «Нет». — «А для чего эти римановы поверхности нужны?» Я что-то стал говорить об аналитических функциях. — «Так значит, надо, чтобы было можно задавать аналитическую функцию!» Короче, они заставили меня с подсказками сформулировать строгое определение римановой поверхности как одномерного комплексного аналитического многообразия. Сочли, что я вполне гожусь в аспирантуру и с этим отпустили; разъяснили, что такое риманова поверхность и отпустили. Экзамен по философии у меня тоже был сдан, я получил две пятерки.

Но в аспирантуру меня не взяли. Очень долго длилась эта эпопея с моей аспирантурой. Дело в том, что Гельфанд начал работать в Стекловке[1], в организуемом Отделении прикладной математики, и решил, что меня и Молчанова надо туда взять как его будущих аспирантов. Институт закрытый, вывески на нем не было. Стали оформляться бумаги, полагающиеся для закрытого заведения. И я там написал, что у меня отец был посажен и умер в 1940-м году. И тогда началось: «Как так?! А почему вы этого не сообщили раньше?» И меня не взяли под этим предлогом. Меня даже в министерство вызывали и укоряли: «Что же это вы, молодой человек, скрывали?» — «Я ничего не скрывал. Когда меня спросили, я сообщил. А при поступлении в университет, когда отца уже три года нет на свете, мне и в голову не пришло, что я должен о нем написать». Длилось это очень долго, с полгода. Включились разные люди и хлопотали, чтобы меня все-таки взяли. И пока мне делать было нечего, я сидел в кабинете математики в старом здании МГУ и занимался. Гельфанд мне велел, учитывая ход вступительного экзамена, прочитать книгу Германа Вейля на немецком языке, которая называется «Die Idee Der Riemannschen Fläche» («Идея римановой поверхности»). Что я и сделал. У меня, по-моему, до сих пор есть тетрадка, где я конспектировал Германа Вейля. С тех пор знаю, что такое риманова поверхность.

---

[1] Математический институт Академии наук им. В.А. Стеклова.

Затем я отсутствовал — я был в армии с 1949-го по 1953-й. Будучи в отпуске (дважды я приезжал в отпуск), я появлялся на семинаре Гельфанда.

Когда я служил в армии последнюю пару лет, я мог заниматься — у меня был более свободный режим, можно было размышлять, что-то писать и так далее. И вот я, будучи в командировке (это отдельный рассказ, что это за командировка), придумал некую теорему. И написал об этом Молчанову, с которым у меня была непрерывная переписка. Он это пересказал Гельфанду, реакция была мгновенной: «А! — говорит, — теперь у Шноля есть диссертация». Вот характерно для математика вообще, что диссертация не состоит в написании толстого труда, а состоит в получении результатов. Если есть один достойный, яркий результат, дальше к нему можно что-то добавить — и все готово. Мне Молчанов пересказал (в письме) этот разговор. Такой отзыв Гельфанда был очень поучителен, и он меня, конечно, ободрил. Потом, по возвращении, я действительно защищал эту диссертацию. Это была довольно длинная эпопея, с Петровским я общался по этому поводу[2]. Стараниями моих друзей, когда мне исполнилось 70 (а это произошло 9 лет тому назад), была написана юбилейная статья в «Успехи математических наук». Попросили Гельфанда ее подписать. Гельфанд не просто подписал, а еще добавил: написал пару фраз про эту теорему — он ее, оказывается, запомнил.

К.И. Бабенко.

Тонкий аналитик, нетривиальный механик и глубокий вычислитель. Написал книгу «Основы численного анализа», не имеющую аналогов в мировой литературе. Организовал школы под названием «Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики».

После того как я поработал в школе, Константин Иванович Бабенко, с подачи Молчанова, сделал попытку взять меня на работу в Институт прикладной математики (он тогда еще назывался Отделение прикладной математики института имени В.А. Стеклова). И неожиданно, при всех сложностях анкеты, это получилось. Это, конечно, не получилось бы 2–3 года назад, а в 1956-м году это получилось. И с этого года я начал работать в этом Отделении прикладной математики, где Гельфанд заведовал отделом. Гельфанд однажды встретил меня в коридоре института и сказал: «Я не пытался Вас взять, полагая, что это безнадежно. А вот Константин Иванович не побоялся — и вот видите как...» С неким таким сожалением, что он сам не попытался, а то бы он взял меня к себе в отдел.

И вот однажды опять он меня встречает в коридоре Института прикладной математики (это был 1963-й или 1964-й год) и спрашивает, не хочу ли я поработать в заочной школе. Я ему сказал, что нет, не хочу. «Ну, хорошо, — говорит, — А вот пособие для заочной школы написать очень нужно». — «Это я готов попробовать». И тогда я познакомился (а может, был знаком немножко раньше) с Еленой Георгиевной Глаголевой. Когда Гельфанд устраивал эту заочную

---

[2] См.: Об Иване Георгиевиче Петровском: Письмо Э.Э Шноля // Математическое просвещение. Третья серия. Вып. 6. 2002. С. 11–13.

школу, надо было бегать по всевозможным начальникам самого разного ранга, в самые разные учреждения — в министерства, еще куда-то. Вот она все это делала. Идея была его, но всю организационную работу провела Е.Г. Глаголева.

Мы с ней взялись за написание брошюры; дали нам какой-то очень маленький срок, порядка полутора месяцев. Мы тогда жили в самом центре — я на нынешней Мясницкой улице, а Елена Георгиевна на Маросейке. Я ходил к ней домой пешком, и мы с ней сидели очень плотно каждый день, что-то писали, а потом созванивались и встречались с Гельфандом. Подбор задач, тематика и т.д. с ним обсуждались, но в детали он особенно не вникал. При этом две главные идеи были его: во-первых, чтобы картинки были на полях, а во-вторых, предисловие должно быть живым. Он сказал, что наше традиционное предисловие слишком занудно и скучно: «Я напишу сам». Так что предисловие к этой книжке написано Гельфандом. Помню забавный случай: мы с Еленой Георгиевной решили поместить задачу о том, что все параболы подобны. Гельфанд при обсуждении удивился: «Разве все подобны?», но через секунду сообразил.

Вот так возникла наша книжечка «Функции и графики». Мы ее очень быстро должны были сдать, и ее издали — была тогда в издательстве рубрика «Молния», в которой выпускали без всякой очереди. Было сказано, что это задания, которые надо рассылать по всей стране. Тираж первого издания был какой-то немыслимый по нынешним временам — то ли 100 000, то ли 200 000. Книжка стоила всего 15 или 20 копеек, была быстро распродана, и через год-два вышли второе и третье издания. Дальше она длительное время стереотипно издавалась для этой школы. Затем, уже в поздние времена (2001) ее напечатали в Московском центре непрерывного математического образования. Напечатали с ошибками. Попалась эта брошюра на глаза Владимиру Игоревичу Арнольду, и он о ней критически высказался[3] (интересно, что он критикует нашу брошюру наряду с книгой Куранта и Роббинса — так мы попали в один ряд с классиками). И тогда мы с Еленой Георгиевной занялись этой книжкой снова. Был период, когда мы много этой книжкой занимались. Теперь оба жили на Юго-Западе, но опять в пешеходной досягаемости, и я снова к ней ходил. Она написала дополнительный раздел про многочлены, и мы довольно долго его переписывали. В результате появилось шестое издание. Конечно, Гельфанду какие-то материалы были посланы, но я не уверен, что он их внимательно читал — он много пишет и много занимается математикой. Вот такая история этой брошюры.

В.И. Арнольд и С.П. Новиков.

В Московском университете
на 70-летнем юбилее И.М. Гельфанда.

По непонятным мне причинам — отчасти потому что Гельфанд первый автор, отчасти потому что брошюра получилась не занудная, — она стала популярна. Время от времени со мной случались разные события, связанные

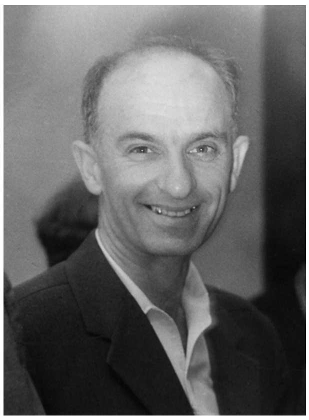
[3] См.: *Арнольд В.И.* Что такое математика? М.: МЦНМО, 2004. С. 3, 71.

с этой брошюрой. Как-то Отделение математики Академии наук решило составить полный список математиков России. Меня попросили назвать пущинских математиков. У меня возник вопрос: кого включать в математики? Я узнал, кто был главным в этом мероприятии, и обратился к нему с вопросом, кого надлежит включать в этот список. Я написал ему, что у нас в институте есть люди, которые, допустим, кончали мехмат, а сейчас занимаются нейронными сетями или кристаллографией. Как быть: включать или нет? Или, наоборот, человек кончал, скажем, физтех, а защитил диссертацию по теории бифуркаций (был такой человек). Ответственный человек мне сказал, что включать надо максимально, и процитировал Колмогорова, который считал, что чуть ли не 4/5 выпускников мехмата должны заниматься проблемами естествознания. Потом он добавил: «Я Вас знаю еще со времени брошюры "Функции и графики"». Он, может, тогда еще школьником был, ведь много лет прошло. Такие вот совершенно неожиданные бывают отклики.

Опять-таки потому, что это Гельфанд, брошюру переводили на разные языки. На английский она была переведена при участии самого Гельфанда и по его инициативе — он ведь в Штатах тоже организовал заочную школу. (Он для английского издания написал предисловие.) Потом я, будучи в Берлине один раз, купил немецкое издание. Есть перевод на персидский и еще на какие-то более редкие языки.

Мои научные контакты с Гельфандом непрерывными никогда не были. Он мне предлагал однажды написать вместе одну работу. Это было, когда они с Г.Е. Шиловым занимались обобщенными функциями — была сначала статья в «Успехах», а потом различные тома замечательной серии книг про обобщенные функции. И был момент, когда Гельфанд хотел разобраться с теорией обобщенных случайных процессов и предложил мне с ним вместе этим заняться, но я уклонился. Я не умею быть младшим автором, а с Гельфандом это неизбежно. Поэтому у меня с ним никаких непосредственных научных действий никогда не было.

Последняя моя серьезная встреча с Гельфандом была на моей докторской защите. Мой ученик по школе Леня Хазин решил, что надо Гельфанда на мою защиту доставить. Он его пригласил, тот сказал: «Ну, вы меня привезете — тогда я буду». Леня взял такси, привез Гельфанда. Гельфанд взял слово и высказал мне похвалу в таких интересных терминах: «Я не понимаю, зачем понадобилось Эммануилу Эльевичу защищать две диссертации сразу». А там, действительно, два совершенно разных куска были: один касался обыкновенных дифференциальных уравнений, а второй касался газового шара и уравнений с частными производными. Защита прошла благополучно. (Я взялся за защиту очень поздно — я работал в Институте математических проблем биологии очень плотно; сил, и времени у меня ни на что не оставалось.) Вот это был последний случай, когда я с ним пересекся, так сказать, на деловой почве. Потом мы с Гельфандом еще случайно встречались — последние годы он жил в Москве на Юго-Западе.



Э.Э. Шноль

И.М. Гельфанд получил звание почетного доктора одного из старинных английских университетов.

По древней традиции И.М. Гельфанду была подарена специальная форма — мантия и шапочка. Его попросили продемонстрировать это одеяние, и он выполнил просьбу.

Сейчас Гельфанд в Америке, уже довольно давно, и он по-прежнему работает. Ему 94, и это замечательный пример научного долголетия. По-видимому, из ныне живущих математиков Гельфанд наиболее известен. Характерен он был всегда живой связью с физикой — В.И. Арнольд в этом смысле с ним солидарен. Правда, Гельфанд никогда не говорил, что математика — это часть физики, но некоторые его работы прямо инициированы знакомством с физиками и с их проблемами.

Гельфанд не кончал никакой институт. Но академик Колмогоров тогда имел возможность взять себе в аспирантуру, кого он захочет. Как они познакомились — этой истории я не знаю. Гельфанд был аспирантом Колмогорова, не имея высшего образования. Есть первая его работа, совместная с Колмогоровым, — про кольца непрерывных функций. И дальше Гельфанд в 25 лет защитил докторскую диссертацию на мехмате по теории нормированных колец, которые сейчас называются «Банаховы алгебры». Это был 1938-й год. После этого несколько лет он ничего не писал. А его следующая большая тема — это теория представлений некомпактных групп. У меня есть подаренный им оттиск 1944-го года — самая первая заметка в «Докладах» о теории представлений групп.

Гельфанд — поразительный математик и по широте того, чем он занимался, и по свежести подходов. Можно посмотреть список того, чем он занимался, в какой-нибудь юбилейной статье — несколько сот публикаций на чрезвычайно разные темы. Ну, и книг много. Он всегда пишет с соавторами, у него почти нет работ, написанных в одиночку. Это его стиль: он дает некий замысел, а дальше надо работать; приходят, приносят вариант, обсуждают, улучшают, пробуют; если уткнулись во что-нибудь, пытаются разобраться. Скорее всего, похоже на то, как мы писали брошюру «Функции и графики».

Примечание. Все снимки сделаны Е.А. Ермаковой: фотография В.И. Арнольда и С.П. Новикова в 1983 г., остальные — в 1973 г.

Вернуться к содержанию

ЧЕХОВ Антон Павлович (1860—1904)

Гимназист VII класса Егор Зиберов милостиво подает Пете Удодову руку. Петя, двенадцатилетний мальчуган в сером костюмчике, пухлый и краснощекий, с маленьким лбом и щетинистыми волосами, расшаркивается и лезет в шкап за тетрадками. Занятие начинается.

Согласно условию, заключенному с отцом Удодовым, Зиберов должен заниматься с Петей по два часа ежедневно, за что и получает шесть рублей в месяц. Готовит он его во II класс гимназии. (В прошлом году он готовил его в I класс, но Петя порезался.)

– Ну-с... – начинает Зиберов, закуривая папиросу. – Вам задано четвертое склонение. Склоняйте fructus!

Петя начинает склонять.

– Опять вы не выучили! – говорит Зиберов, вставая. – В шестой раз задаю вам четвертое склонение, и вы ни в зуб толкнуть! Когда же, наконец, вы начнете учить уроки?

– Опять не выучил? – слышится за дверями кашляющий голос, и в комнату входит Петин папаша, отставной губернский секретарь Удодов. – Опять? Почему же ты не выучил? Ах ты, свинья, свинья! Верите ли, Егор Алексеич? Ведь и вчерась порол!

И, тяжело вздохнув, Удодов садится около сына и засматривает в истрепанного Кюнера. Зиберов начинает экзаменовать Петю при отце. Пусть глупый отец узнает, как глуп его сын! Гимназист входит в экзаменаторский азарт, ненавидит, презирает маленького краснощекого тупицу, готов побить его. Ему даже досадно делается, когда мальчуган отвечает впопад – так опротивел ему этот Петя!

– Вы даже второго склонения не знаете! Не знаете вы и первого! Вот вы как учитесь! Ну, скажите мне, как будет звательный падеж от meus filius[1]?

– От meus filius? Meus filius будет... это будет...

Петя долго глядит в потолок, долго шевелит губами, но не дает ответа.

– А как будет дательный множественного от dea[2]?

– Deabus... filiabus! – отчеканивает Петя.

Старик Удодов одобрительно кивает головой. Гимназист, не ожидавший удачного ответа, чувствует досаду.

– А еще какое существительное имеет в дательном abus? – спрашивает он.

Оказывается, что и «anima – душа» имеет в дательном abus, чего нет в Кюнере.

– Звучный язык латинский! – замечает Удодов. – Алон... трон... бонус... антропос... Премудрость! И все ведь это нужно! – говорит он со вздохом.

---

[1] Мой сын *(лат.)*

[2] Богиня *(лат.)*

«Мешает, скотина, заниматься… — думает Зиберов. — Сидит над душой тут и надзирает. Терпеть не могу контроля!» — Ну-с, — обращается он к Пете. — К следующему разу по латыни возьмете то же самое. Теперь по арифметике… Берите доску. Какая следующая задача?

Петя плюет на доску и стирает рукавом. Учитель берет задачник и диктует:

– «Купец купил 138 арш. черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное 3 руб.?» Повторите задачу.

Петя повторяет задачу и тотчас же, ни слова не говоря, начинает делить 540 на 138.

– Для чего же это вы делите? Постойте! Впрочем, так… продолжайте. Остаток получается? Здесь не может быть остатка. Дайте-ка я разделю!

Зиберов делит, получает 3 с остатком и быстро стирает.

«Странно… — думает он, ероша волосы и краснея. — Как же она решается? Гм!.. Это задача на неопределенные уравнения, а вовсе не арифметическая»…

Учитель глядит в ответы и видит 75 и 63.

«Гм!.. странно… Сложить 5 и 3, а потом делить 540 на 8? Так, что ли? Нет, не то».

– Решайте же! — говорит он Пете.

– Ну, чего думаешь? Задача-то ведь пустяковая! — говорит Удодов Пете. — Экий ты дурак, братец! Решите уж вы ему, Егор Алексеич.

Егор Алексеич берет в руки грифель и начинает решать. Он заикается, краснеет, бледнеет.

– Эта задача, собственно говоря, алгебраическая, — говорит он. — Ее с иксом и игреком решить можно. Впрочем, можно и так решить. Я, вот, разделил… понимаете? Теперь, вот, надо вычесть… понимаете? Или, вот что… Решите мне эту задачу сами к завтраму… Подумайте…

Петя ехидно улыбается. Удодов тоже улыбается. Оба они понимают замешательство учителя. Ученик VII класса еще пуще конфузится, встает и начинает ходить из угла в угол.

– И без алгебры решить можно, — говорит Удодов, протягивая руку к счетам и вздыхая. — Вот, извольте видеть…

Он щелкает на счетах, и у него получается 75 и 63, что и нужно было.

– Вот-с… по-нашему, по-неученому.

Учителю становится нестерпимо жутко. С замиранием сердца поглядывает он на часы и видит, что до конца урока остается еще час с четвертью — целая вечность!

– Теперь диктант.

После диктанта — география, за географией — Закон Божий, потом русский язык, — много на этом свете наук! Но вот, наконец, кончается двухчасовой урок. Зиберов берется за шапку, милостиво подает Пете руку и прощается с Удодовым.

– Не можете ли вы сегодня дать мне немного денег? — просит он робко. — Завтра мне нужно взносить плату за учение. Вы должны мне за шесть месяцев.

– Я? Ах, да, да… — бормочет Удодов, не глядя на Зиберова. — С удовольствием! Только у меня сейчас нету, а я вам через недельку… или через две…

Зиберов соглашается и, надев свои тяжелые, грязные калоши, идет на другой урок.

Вернуться к содержанию

Вокруг математики

Простые делители оберквадратов

ШАБАТ Георгий Борисович
профессор Института лингвистики
Российского государственного
гуманитарного университета
george.shabat@gmail.com

СГИБНЕВ Алексей Иванович
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
sgibnev@mccme.ru

Мы с вами сейчас проведем небольшое исследование, в котором будет и экспериментальная часть, и объяснение. Единственное, чем будет отличаться наша работа от полноценного научного исследования, — это тем, что авторам результат известен. Тем бо́льшая нагрузка ляжет на читателей.

Постановка задачи и формулировка гипотезы

Начнем со знакомства с терминологией. Надеемся, что всем известно слово «унтерофицер» — чин чуть ниже офицера. И есть менее известное слово «обекондуктор». Этот, наоборот, немножко главнее кондуктора.

Так вот, унтерквадраты — это

$$0,\ 3,\ 8,\ 15,\ 24,\ 35\ \text{и т.д.},$$

то есть числа, которые на единицу меньше квадрата. А оберквадраты — это

$$2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26\ \text{и т.д.},$$

то есть числа, следующие за квадратами.

Итак, перед нами есть два ряда натуральных чисел. Нас интересуют *простые делители этих двух рядов чисел* (конечно, кроме 0). Для унтерквадратов можно записать общую формулу $n^2 - 1$, и ее сразу можно разложить на множители: $n^2 - 1 = (n - 1)(n + 1)$. В силу этого соотношения, ничего интересного сказать про делители унтерквадратов мы не можем, так как они заведомо разлагаются на два множителя, пробегающие все числа, и любое простое число делит какой-нибудь унтерквадрат. Поэтому мы с унтерквадратами попрощаемся и заниматься будем исключительно *простыми делителями оберквадратов*. Для них тоже есть общая формула $n^2 + 1$, но, как вы понимаете, ее на множители (во всяком случае, обычные «школьные») разложить нельзя. Так что тут есть интрига.

Задача 1. Какие простые числа могут быть делителями оберквадратов?

Давайте начнем раскладывать оберквадраты на множители. (Договоримся писать множители по возрастанию.) Получим такие равенства:

$$2 = 2,$$
$$5 = 5,$$
$$10 = 2 \cdot 5,$$
$$17 = 17,$$
$$26 = 2 \cdot 13,$$
$$37 = 37,$$
$$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5,$$
$$65 = 5 \cdot 13,$$
$$82 = 2 \cdot 41.$$

(Когда число простое, запишем «разложение» в виде такого, вроде бы бессмысленного, равенства: $2 = 2$, $5 = 5$ и т.д.) Нетрудно сообразить, что через раз среди оберквадратов будут встречаться нечетные числа. Можно заметить, что в этих равенствах встречаются далеко не все простые числа. Давайте выпишем подряд первые простые числа и выделим из них те, которые являются множителями оберквадратов:

2, 3, **5**, 7, 11, **13**, **17**, 19, 23, 31, **37**, **41**, 47, **53**, ...

(Проверьте, что 53 — тоже делитель какого-то оберквадрата.)

Введем еще один термин: простые числа, которые являются делителями оберквадратов, будем в пределах этой статьи называть *хорошими*. Тогда задачу 1 можно сформулировать совсем кратко: «Какие простые числа — хорошие?» Остальные простые числа будем называть *плохими*.

В этом месте читателю рекомендуется временно прекратить чтение и продолжить эксперименты самостоятельно. Наверно, лучше это делать не вручную, а на компьютере, разложив, скажем, первую тысячу оберквадратов. На таком богатом материале легче искать закономерность.

Чтобы удобнее было анализировать ситуацию, соберем числа в две группы:

2, 5, 13, 17, 29, 37, 41, 53, ... — хорошие,

3, 7, 11, 19, 23, 31, 43, 47, ... — плохие.

Как видно, простые числа, идущие через 2 (они называются близнецами), оказываются в разных группах. Если основная закономерность вам еще не бросилась в глаза, давайте посмотрим на последовательные *скачки́* между хорошими или плохими числами. (Скачком мы называем разность между двумя последовательными числами.) Будем писать скачки над пробелом между числами. Сначала выпишем их для хороших чисел:

	3		**8**		**4**		**12**		**8**		**4**		**12**	
2		5		13		17		29		37		41		53

Теперь скачки для плохих чисел:

	4		**4**		**8**		**4**		**8**		**12**		**4**	
3		7		11		19		23		31		43		47

Сразу видно, что для хороших числе все скачки, кроме первого, четные. Это легко понять, потому что существует единственное четное простое число 2, а все остальные нечетные. Однако среди скачков встречаются не все четные числа, а числа 4, 8, 12, ... Какой простой закон выделяет из всех четных чисел именно эти? Все они делятся на 4!

Значит, разности чисел из одной группы делятся на 4. Переформулируем это чуть менее привычным для нас образом. Если разность двух чисел делится на 4, то эти числа имеют одинаковый остаток при делении на 4. Смотрим:

$$\begin{array}{ll} 2 = 0\cdot 4 + 2, & 3 = 0\cdot 4 + 3, \\ 5 = 4\cdot 1 + 1, & 7 = 4\cdot 1 + 3, \\ 13 = 4\cdot 3 + 1, & 11 = 4\cdot 2 + 3, \\ 17 = 4\cdot 4 + 1, & 19 = 4\cdot 4 + 3, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{array}$$

Итак, прямые наблюдения привели нас к предположению.

Предположение 1. Хорошие числа — это 2 и числа вида $4n + 1$, а плохие — это числа вида $4n + 3$, где $n \in \mathbf{N}$.

Можно проверить эту гипотезу для больших чисел на компьютере, например, в системе Maple. Скажем, $1\,000\,001 = 101\cdot 9901$, а $2007^2 + 1 = 2\cdot 5^2\cdot 13\cdot 6197$. Нетрудно видеть, что остатки всех множителей при делении на 4 равны 1, а значит, пока что наша гипотеза подтверждается.

На этом экспериментальная фаза закончена. Чтобы доказать гипотезу, мы перейдем в другую область; это часто бывает полезно в математике.

Переформулировка задачи и ее решение

Какие бывают числовые множества? Наряду с множеством натуральных чисел существуют и другие множества, в том числе конечные. Самому старому конечному множеству две тысячи лет от роду. Чтобы его описать, составим таблицы сложения и умножения для четных и нечетных чисел:

+	Ч	Н
Ч	Ч	Н
Н	Н	Ч

·	Ч	Н
Ч	Ч	Ч
Н	Ч	Н

Нечетные числа при делении на 2 дают остаток 1. Для единообразия будем вопреки школьной привычке говорить, что четные числа при делении на два дают остаток 0.

Перепишем эти таблицы, ставя вместо Ч остаток 0, а вместо Н остаток 1:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

Мы описали это множество вслед за древними греками, но назовем его по-современному: *это поле вычетов по модулю два*. Обозначается оно $\boldsymbol{F}_2$. (Это общепринятое обозначение, в отличие от терминов «оберквадраты» и «хорошие числа».)

Теперь опишем поле вычетов по модулю 5. Вот его таблица сложения:

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Но для нашей гипотезы важнее таблица умножения:

·	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

В каждой строке все числа встречаются по одному разу – постарайтесь это доказать.

Теперь вернемся к задаче 1 и переформулируем ее на новом языке. Заметим, что утверждение «x^2+1 делится на p» равносильно такому:

$$x^2 = -1 \text{ в } \boldsymbol{F}_p. \qquad (1)$$

Мы знаем, что в натуральных числах уравнение (1) не имеет решений. Однако в полях вычетов дело обстоит совсем иначе. Например, в $\boldsymbol{F}_5$ элемент -1 — это то же самое, что 4. А 4 — как раз квадрат!

Таким образом, задача 1 сводится к следующей задаче.

Задача 2. Для каких простых p уравнение $x^2 = -1$ имеет решение в поле $\boldsymbol{F}_p$?

Исследуем уравнение (1). Начнем с поля $\boldsymbol{F}_5$, для которого все готово. Рассмотрим остатки от деления на 5 при возведении чисел в степень. (Поскольку в этом поле определено умножение, то определена и степень.) Будем выписывать каждое не равное нулю число вместе с его степенями, пока не дойдем до единицы:

1,
2, **4**, 3, 1,
3, **4**, 2, 1,
4,1*.

Видим, что число 4, то есть −1, в двух случаях встречается на втором месте, иными словами, является квадратом некоторого элемента из $\boldsymbol{F}_5$ (собственно, квадратом предыдущего элемента: $4 = 2^2 = 3^2$).

Теперь рассмотрим последовательности степеней в поле $\boldsymbol{F}_7$:

1,
2, 4, 1,
3, 2, **6**, 4, 5, 1,
4, 2, 1,
5, 4, **6**, 2, 3, 1,
6, 1.

У нас встречается число 6, то есть −1 в поле $\boldsymbol{F}_7$, однако оно каждый раз стоит либо на третьем, либо на первом месте в строке, и, следовательно, не является квадратом.

Построим таблицу для поля $\boldsymbol{F}_{13}$:

1,
2, 4, 8, 3, 6, **12**, 11, 9, 5, 10, 7, 1,
3, 9, 1,
4, 3, 12, 9, 10, 1,
5, **12**, 8, 1,
6, 10, 8, 9, 2, **12**, 7, 3, 5, 4, 11, 1,
. . . .

Выделенные числа, равные −1 в поле $\boldsymbol{F}_{13}$, опять встречаются на четных местах, то есть являются квадратами элементов с вдвое меньшим номером в строке. В самом деле, $a^{2k} = -1 \Leftrightarrow b^2 = -1$, где $b = a^k$.

Постройте самостоятельно таблицу для поля $\boldsymbol{F}_{11}$ и убедитесь, что элемент 10, то есть −1 в поле $\boldsymbol{F}_{11}$, встречается только на нечетном месте в строке и поэтому не может являться квадратом.

Продолжая строить таблицы для полей $\boldsymbol{F}_{17}$, $\boldsymbol{F}_{19}$ и т.д., можно обнаружить следующее: в полях порядка $4n + 1$ элемент −1 встречается на четном месте в строке, а в полях порядка $4n + 3$ не встречается. То есть поля разбиваются на два типа по тому же правилу, которое мы открыли для хороших и плохих чисел.

Предположение 2. Уравнение (1) разрешимо в поле $\boldsymbol{F}_p$, если $p = 4n + 1$ или $p = 2$, и неразрешимо, если $p = 4n + 3$.

Если мы сможем доказать это предположение, то автоматически будет доказано и эквивалентное ему предположение 1.

* Выпишем *длины* этих строк: 1, 4, 4, 2. Если проделать такие же действия для других простых чисел p вместо 5, то можно обнаружить некоторые интересные закономерности для *длин циклов* степеней в поле $\boldsymbol{F}_p$.

Рассмотрим в общем виде последовательность степеней элемента a в поле $\boldsymbol{F}_p$. Сейчас нам удобнее начинать ее с 1:

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3, \ldots$$

Теперь ответим на несколько вопросов.

1. Почему последовательность зацикливается?

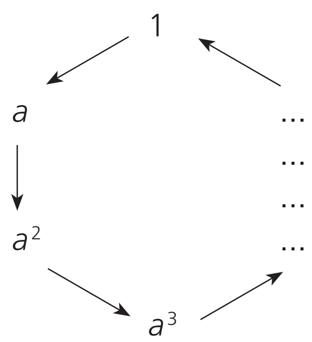
Следующий элемент в последовательности степеней (при заданном a) определяется только предыдущим. Значит, если элемент повторился, то и вся последовательность с этого места повторяется. Однако ненулевых элементов в поле $\boldsymbol{F}_p$ конечное число (а именно, $p - 1$), поэтому элементы обязательно начнут повторяться.

2. Почему повторение начинается с 1, а не с какого-то из следующих элементов?

Поскольку каждый элемент в строке a таблицы умножения встречается один раз, то он представим в виде произведения элемента a на какой-то элемент *единственным* образом. Тем самым, последовательность можно продолжать (по одному элементу!) не только вперед, но и *назад*. Скажем, если повторился элемент a^k, то перед ним обязательно будет a^{k-1}, перед тем — a^{k-2}, ..., a, **1**.

3. Что такое цикл?

Запишем повторяющуюся часть последовательности по кругу:



Она и называется *циклом*. Теперь нам опять лучше сдвинуть начало цикла и отсчитывать его от a. Все время выписывать цикл по кругу неудобно, поэтому напишем его в строчку:

$$\{a,\ a^2, a^3,\ \ldots,\ 1\}.$$

4. Какова длина цикла?

Длина цикла в поле $\boldsymbol{F}_p$ не больше $p - 1$, так как ненулевых элементов ровно $p - 1$. Наибольшая длина цикла достигается, когда в нем встречаются *все* ненулевые элементы поля $\boldsymbol{F}_p$. (Проверьте по нашим таблицам, что такое бывает.)

Определение. Элемент a, последовательность степеней которого пробегает все ненулевые элементы поля $\boldsymbol{F}_p$, называется *первообразным корнем* для числа p.

Например, как видно из наших таблиц, для числа $p = 5$ первообразными корнями являются элементы 2 и 3; для $p = 7$ — элементы 3 и 5 и т.д. Есть теорема, утверждающая, что для любого простого p первообразный корень существует**. Это самое глубокое утверждение в нашем исследовании, мы его оставим без доказательства.

** Для составного — необязательно. Придумайте примеры.

Если же a — не первообразный корень, то оказывается, что цикл укладывается в отрезке $p-1$ целое число раз. (Проверьте по нашим таблицам.) Тем самым, на месте $p-1$ всегда стоит 1. Это *малая теорема Ферма*.

Осталось заметить, что если на k-м месте стоит -1 или 1, то на месте $2k$ (с вдвое большим номером) стоит 1. Обратно, если на месте $2k$ стоит 1, то на k-м месте (с вдвое меньшим номером) — либо 1, либо -1 ($(-1)^2 = 1$, $1^2 = 1$).

Теперь мы готовы доказать предположение 2.

Пусть $p = 4n + 1$. Имеем $4n$ ненулевых элементов. Пусть a — первообразный корень для p; выпишем его степени:

$$a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots,\ a^{4n} = 1.$$

По последнему замечанию, на месте $2n$ (с вдвое меньшим номером) может оказаться либо 1, либо -1. Однако 1 не может там быть, так как тогда цикл будет содержать лишь половину элементов $\boldsymbol{F}_p$. Значит, там обязательно окажется -1. То есть квадрат числа, стоящего на месте n, равен -1, и уравнение (1) разрешимо. (Случай $p = 2$ разберите самостоятельно.)

Теперь пусть $p = 4n + 3$. У нас $4n + 2$ ненулевых элемента. Докажем, что -1 **не** может попасть на четное место. Все возможные номера элемента 1 в последовательности степеней имеют вид $\dfrac{4n+2}{m}$, где m — любой из делителей числа $4n + 2$. Элемент -1 может стоять только на месте с вдвое меньшим номером, чем номер места, на котором стоит 1, то есть на месте $\dfrac{4n+2}{2m} = \dfrac{2n+1}{m}$. (Например, если элемент a — первообразный корень для p, то -1 стоит на месте $2n + 1$, т.е. посередине.) Но это место нечетно. Значит, уравнение (1) неразрешимо.

Заключение

Тема для дальнейшего исследования. Какие натуральные числа представимы в виде суммы квадратов двух целых чисел? Для каких $n \in \boldsymbol{N}$ пара $x, y \in \boldsymbol{N}$, для которой $n = x^2 + y^2$ и $x \geq y$, единственна? Для каких $n \in \boldsymbol{N}$ существуют две такие пары? Три пары? И т.д.

Терминологическая справка. Термин «оберквадрат» ввел из педагогических соображений Г.Б. Шабат.

Решение задачи об оберквадратах не ново.

Вернуться к содержанию

Игра в полоску

РОЙТБЕРГ Михаил Абрамович
зав. лабораторией прикладной математики
Института математических проблем биологии РАН
mroytberg@mail.ru

Математик. Вот скажи, например, сколько углов в треугольнике?

Студентка-медик (*задумывается*). М-м-м...

Математик. Правильно! В правильном треугольнике – три. А так бывает по-разному.

Разговор на кухне в Кузьминках. 1980-е гг.

Что это такое?

Введение. Про эту игру (точнее – про что-то похожее) я впервые услышал в 57-й школе от кого-то из молодых учительниц в начале 1990-х. К сожалению, не помню, от кого именно. Видимо, из штата, а не «из приходящих». В общем, источник игры – фольклорный. Тогда я занимался классами выравнивания в начальной школе и искал задачи («деятельности», то есть *activities*), которые давали ребятам возможность думать на математическом материале.

За прошедшие десять лет я много раз играл в эту игру: на уроках (то есть при работе в классе), на индивидуальных занятиях и просто так. Оказалось, что игре в полоску все возрасты покорны: от (математически) слабых первоклассников до выпускников. В ней есть предмет для размышления, и есть способ, как сделать эти размышления деятельными. Есть также математическое содержание – достаточно глубокое для школьного уровня.

В ходе работы сложилась методика работы с игрой в полоску, появились более сложные варианты игры. Назначение этого текста — поделиться накопленным опытом. Я стремился сделать текст полезным и не искушенным в математике и педагогике читателям, например родителям, которые хотят заниматься со своими детьми. Поэтому он местами, наверное, будет тривиальным для более подготовленных коллег.

Текст возник в рамках попытки описать и систематизировать проекты, которые можно использовать в начальной школе (подробнее о проектах см. мою статью в газете «Математика», № 13/2008). Основное внимание в тексте уделено работе с учениками начальной школы. Впрочем, важен не только возраст ребенка, но и его подготовленность, склонность к логическому мышлению и многое другое.

Главное условие педагогического успеха при работе с этим проектом (и большинством других) в том, чтобы ученик получал удовольствие от работы и возникающих у него догадок. Поэтому, если вы заметите скуку или усталость, отложите работу. И последнее. Для удобства мы употребляем термины «ученик» и «учитель». Но это лишь условность: в роли «учителя» может выступать мама или бабушка, а «ученика» могут звать Маша. Желаю успеха!

Правила игры. Играют двое, они ходят по очереди. Игровое поле — полоска, разделенная на клетки. За один ход игрок может закрасить одну клетку или две соседние клетки (рис. 1). Красить клетки повторно нельзя. Выигрывает тот, кто закрасил последнюю клетку, то есть сделал последний ход. Длина полоски может быть любой.

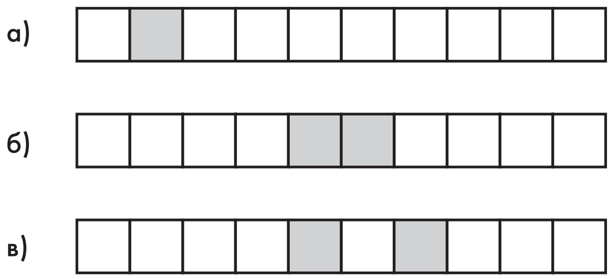


Рис. 1. На рис. «а» и «б» показаны возможные ходы.
Ход, изображенный на рис. «в», запрещен.

Примеры партий приведены на рисунке 2. Играют два игрока A и B, их ходы пронумерованы: A1 — первый ход игрока A, B2 — второй ход игрока B и т.д. Выигрышный ход на рисунке подчеркнут.

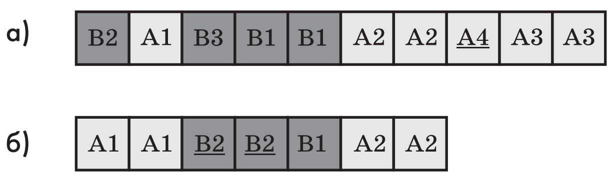


Рис. 2. Примеры партий. В партии на рис. «а» выигрывает игрок A, в партии на рис. «б» выигрывает игрок B.

Задача ученика — научиться выигрывать при любой длине полоски. Ученик сам выбирает, будет ли он ходить первым («играть белыми») или вторым («играть черными»). «Научиться выигрывать» — значит уметь выигрывать наверняка, не надеясь на ошибку противника.

Замечание. В самой постановке задачи заключена важная и не очевидная для ребенка идея: можно придумать метод, который позволяет выиграть, *как бы ни играл противник*. Говоря математически, можно найти выигрышную стратегию (подробнее см.: *Шень А*. Игры и стратегии в математике. М.: МЦНМО, 2007).

Как выигрывать при игре в полоску? Об этом написано в Приложении. Мы советуем сначала попробовать найти выигрывающую стратегию самостоятельно, это поможет лучше понять трудности ученика. А приложение читать позже — когда справитесь (или, по крайней мере, немного подумаете над задачей). Если вам не хочется долго думать, все равно не стоит спешить с чтением ответа. Читайте дальше и попробуйте встать на место ученика. А впрочем, поступайте как вам удобнее.

Методика работы

Начало работы. В начале нужно объяснить правила игры и убедиться, что ученик их понял. При этом могут пригодиться рисунки 1 и 2. Полезно сыграть с учеником одну-две партии (в классе это можно сделать у доски). Следующая цель — объяснить ученику, что значит «научиться выигрывать».

В игре в полоску естественна работа учеников парами. Если у вас один ученик, вам придется составить ему компанию. При этом для вас дополнительной трудностью будет избегать неявных подсказок. Итак, пара учеников понимает правила игры и (можно надеяться) понимает, что значит научиться выигрывать в игру. Предоставьте их самим себе: они начнут играть. Через пять-десять минут стоит поинтересоваться, что происходит. Скорее всего, дети сообщат, кто сколько партий выиграл, но не смогут предъявить каких-либо подходов к поиску стратегии выигрыша. При этом окажется, что дети играли на достаточно длинных полосках, длиной около 10 клеток.

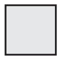
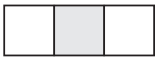
Полоски длины от 1 до 4. Предложите ученикам начать анализ с простейших случаев, то есть с коротких полосок. Полезно спросить: «Какая полоска самая простая?». Ребята, как правило, не называют полоску длины 1, а именно с нее стоит начать. Вообще, идея начинать анализ задачи с простейших случаев, не пренебрегая совсем простыми (тривиальными), — это очень важная идея.

Замечание. Здесь произошло важное событие — переход от игры к *исследованию* игры. Именно поэтому оказываются интересными и важными тривиальные случаи: играть на полоске длины 1 — издевательство, а проанализировать этот случай полезно. Как правило, дети без подсказки сами не переходят от игры к ее систематическому исследованию. Иногда даже с подсказкой это может вызвать трудности.

Итак, начинаем последовательно разбирать случаи полосок длины 1, 2, 3 и т.д. В каждом случае первый вопрос к ученику: «Ты хочешь ходить первым или вторым?». Для полоски длины 1, очевидно, выигрывает игрок, который ходит первым («белый»), — в один ход. Точно так же обстоит дело с полоской длины 2. Полоска длины 3 — первый относительно сложный случай. Многие дети хотят играть вторыми — потому что *неявно* предполагают, что первый закрасит одну или две клетки с краю. Попросите ученика разобрать *все* возможные ходы первого игрока и *все* возможные ответы второго. Скорее всего, он обнаружит ход в середину полоски и поймет, что этот ход выигрывает партию.

Выигрывающий ход для первого игрока в случае полоски длины 4 дети обычно находят самостоятельно — сразу или немного подумав. Стратегия для полоски длины 4 — та же, что и для полоски длины 3. Отличие только одно: «серединка», которую нужно закрасить первым ходом, — это не одна, а две клетки.

Результаты анализа полосок длины от 1 до 4 удобно представить в виде таблицы:

Длина	Победитель	Первый ход
1	A	
2	A	
3	A	
4	A	

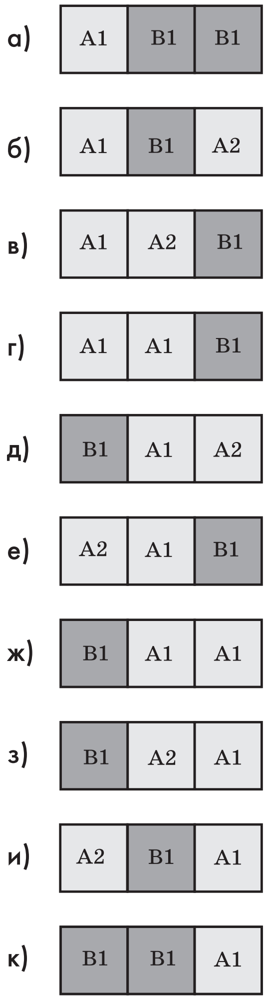


Рис. 3. Все возможные партии на полоске длины 3. Первый ход в середину — единственный, гарантирующий победу «белых» при любой игре «черных».

Замечание. Для полоски длины 3 можно явно выписать все возможные партии и проследить, кто в каком случае выигрывает (рис. 3). Такое упражнение очень полезно, но выполнять его стоит, только если оно окажется естественным и интересным для ученика. Например, если ученик сам захотел играть вторым или просто имеет склонность к скрупулезному разбирательству. Отталкиваясь от этой работы, можно объяснить важное понятие *дерева игры.* Список партий и дерево вариантов лучше начать строить вместе с учеником и в подходящий момент передать управление ученику. Уровень погружения в материал зависит от ученика. В начальной школе обычно целесообразно просто показывать интересные ситуации, не настаивая на том, чтобы ребенок освоил соответствующие абстрактные понятия полностью.

Полоски длины 5 и 6. Полоска длины 5 — это новый уровень сложности: партия может продолжаться целых 3 хода (то есть первый игрок ходит 3 раза, а второй игрок ходит 2 раза). Ученик, скорее всего, догадается, как выигрывать. Один из учеников описал свой метод так: «Нужно закрасить среднюю клетку. Затем нужно красить столько же клеток, сколько и противник, но с другой стороны». Это совершенно верное описание выигрышной стратегии для 5 клеток, хотя оно и не описывает однозначно, какую именно из двух клеток «с другой стороны» должен закрасить первый игрок вторым ходом. В обоих случаях второму игроку достанутся две изолированные клетки, что, очевидно, ведет к проигрышу. Этот же метод работает и для 6 клеток, но на первом ходу нужно закрасить две средние клетки. Результаты анализа полосок длины

5 и 6 тоже нужно занести в таблицу, дополнив ее двумя строками.

Замечание. Если при разборе полоски длины 5 или 6 ученик захочет играть вторым, не поддавайтесь на это и не начинайте играть с ним «за первого игрока». Пусть переберет все возможные ходы первого игрока сам!

Эквивалентные позиции. При переборе первых ходов естественно возникает понятие *эквивалентных позиций.* Интуитивно понятно, что позиции «а» и «б» на рисунке 4 «одинаковые». Говоря более точно, эквивалентные («одинаковые») позиции — это позиции, имеющие одинаковое количество незакрашенных кусков, причем эти куски имеют соответственно одинаковую длину. Расположение кусков на исходной полоске значения не имеет. Здесь мы сталкиваемся еще с одним важным (как в математике, так и вне нее) и глубоким понятием — понятием эквивалентности. Неформально говоря, мы объявляем часть свойств объекта важными (количество незакрашенных кусков, их длины), а остальные — несущественными (здесь — расположение кусков). Объекты, которые отличаются только несущественными свойствами, мы считаем одинаковыми — в рамках изучаемой задачи. Когда меняется задача, может измениться представление о существенном и не существенном. То, что раньше казалось разным, окажется одинаковым. И наоборот.

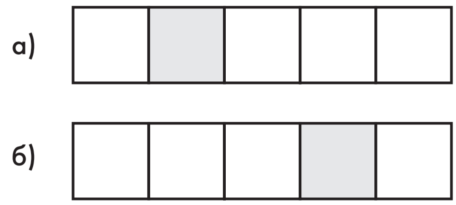


Рис. 4. Эквивалентные позиции, полученные после различных первых ходов.

Ребята интуитивно понимают эквивалентность позиций и иногда при просьбе перечислить все возможные позиции отказываются считать эквивалентные позиции различными. Переубеждать их не стоит. Можно просто нарисовать пропущенный вариант и сказать что-то вроде: «А бывает еще и так, но это то же самое, что у тебя нарисовано».

Наряду с эквивалентными позициями можно говорить об эквивалентных ходах — ходах, которые из данной позиции приводят к эквивалентным позициям. Например, оба упоминавшихся выше возможных способа закрасить одну клетку «с другой стороны» пятиклеточной полоски — эквивалентны. На рисунке 4 позиция а) получена закрашиванием 2-й клетки слева, а позиция «б» — 2-й клетки справа. Указанные ходы эквивалентны. Подобно эквивалентным позициям, эквивалентные ходы часто не воспринимаются ребятами как различные. Очевидно, если начальные ходы эквивалентны, то они закрашивают симметричные (относительно середины полоски) клетки.

Сведение к уже известному. По ходу разбора полосок длины 4 и 5 у ученика может возникнуть идея закрасить первым ходом одну или две крайние клетки. Этого делать, конечно, нельзя: второму игроку достанется позиция, в которой мы уже знаем, как выигрывать. Проявив педантичность, можно уточнить: получится позиция, эквивалентная уже разобранной. Еще один пример часто возникающей позиции — это две изолированные свободные клетки. В этой позиции тот, кто должен ходить, проигрывает.

Умение распознавать уже известные ситуации, сводить новые ситуации к известным — все это очень важные умения в математике и вне ее. Все действия, помогающие ребенку вырабатывать такие умения, полезны. Однако, особенно при работе с маленькими детьми, эти действия должны быть тактичными и ненавязчивыми. Разговаривая с учеником, просто обращайте его внимание на появление при анализе позиций, которые уже встречались ранее. В частности, хорошо, чтобы ученик понял, почему нельзя первым ходом закрашивать крайние клетки.

Полоски длины 7 и 8. Это — ключевой момент. На занятиях в классе подавляющее число учеников начальной школы за один урок останавливаются на уровне 4–6 клеток. Так что описываемый этап работы относится ко второму, а иногда и третьему занятию. В отличие от полосок меньшей длины, полоска длины 7 может (довольно редко) стать камнем преткновения. Это выразится в потере интереса учеников к работе. В этом случае работу стоит на время отложить. Универсальный способ помощи ученику — это перебор возможных действий. Если сочтете это необходимым, начните его делать вместе с учеником. В последнем случае пусть ученик сам (или с вашей минимальной помощью) сформулирует (лучше письменно) выводы из ваших совместных наблюдений.

Источник трудностей полоски длины 7 по сравнению с полосками длины 5 и 6, по-видимому, вот в чем. Правильное начало для «белых», как и раньше, — занять середину. Однако для второго хода, в отличие от полоски длины 5, уже есть несколько неэквивалентных ответных ходов «с другой стороны».

Оптимистический сценарий работы состоит в следующем. Ученик решает (сразу или после колебаний) играть первым. Затем (возможно, не сразу) решает попробовать закрасить среднюю клетку. После этого следует предложить ему аккуратно перебрать все возможные ответы противника и свои действия для каждого возможного ответа. Наибольшую трудность представляет, естественно, ход противника в середину боковой тройки (рис. 5,*а*). В этом случае *единственный* правильный второй ход — в середину другой тройки (при любом другом ходе «белые» проигрывают; один из возможных неправильных ходов изображен на рис. 5,*б*). Ученик может догадаться до идеи «симметричного» ответа или найти его в ходе методичного перебора вариантов. Их не слишком много, особенно если сразу отбрасывать уже известные варианты.

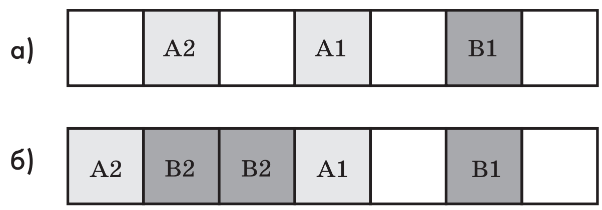


Рис. 5. Полоска длины 7. В случае «а» «белые» выигрывают, в случае «б» — проигрывают.

Если ученик догадается до выигрышной стратегии, попросите продемонстрировать ее в игре, а сами испробуйте все варианты игры за «черных». После этого попросите четко сформулировать, в чем же состоит его стратегия. Это поможет ученику подытожить свои наблюдения перед решающим усилием. Специально добиваться на этом промежуточном этапе кристальной ясности изложения необязательно.

После того как полоска длины 7 разобрана, разобраться с полоской длины 8 легче: аналогия между полосками длины $2n - 1$ и $2n$ (3 и 4, 5 и 6, 7 и 8 и т.д.) уже понятна ученику, хотя, возможно, и не может быть артикулирована им.

Побочный выигрывающий ход. Дополнительная сложность анализа полоски длины 7 состоит в том, что описанный выше ход в середину — не единственный выигрывающий ход. Другой выигрывающий ход показан на рисунке 6. Аналогичный способ выиграть есть, кстати, и для полоски длины 6. Изображенный на рисунке 6 ход не допускает естественного обобщения для полосок большей длины и фактически затрудняет работу ученика, додумавшегося до этого хода.

	A1	A1				

Рис. 6. Еще один выигрывающий начальный ход «белых» для полоски длины 7. У «черных» есть 8 вариантов ответа. Во всех случаях «белые» ответным ходом могут свести игру к двум изолированным клеткам и выиграть.

Если указанный ход будет предъявлен в качестве выигрышного, нужно попросить ученика разобрать все возможные ответы «черных» и доказать, что ход и в самом деле выигрывает. Далее стоит попросить ученика поискать другие выигрывающие ходы (не эквивалентные найденному!), описать все выигрывающие ходы. То, что ученик нашел побочный выигрывающий ход, показывает, что он хорошо освоился в игре и такой перебор ему по силам. В ходе перебора будет найден и нужный нам выигрывающий ход в середину.

Что будет дальше. На анализ полосок длины до 8 включительно у разных учеников уйдет от одного до трех занятий. Скорее всего, мы находимся в начале третьего занятия. К этому времени ребенок уже освоился с игрой и в принципе готов придумать выигрывающую стратегию, основанную на идее симметрии. Возможно, он усвоит только идею «захвата середины», а чтобы сформулировать метод полностью, ему еще придется повозиться. В любом случае, он уже достаточно владеет методикой анализа, чтобы самостоятельно анализировать полоски большей длины — если не почувствует скуку и усталость. Против скуки есть два лекарства: сильное — отложить работу и слабое — просто поиграть в полоску, не затрудняя себя анализом. На этом этапе можно только ждать, пока ребенок придет к решению, и надеяться (вполне обоснованно), что ждать придется не слишком долго. Можно помогать ребенку перебирать возможные ситуации.

Если ученик уверенно заявляет, что знает, как выигрывать на полосках любой длины, советуем поступить так. Сначала проверьте его в игре на полосках разной длины, убедитесь, что он действительно знает, как выигрывать. Если его стратегия неверная, постарайтесь выиграть и вернуть ученика к анализу игры.

И, наконец, вы уверены, что ученик придумал, как выигрывать при игре в полоску (нашел выигрышную стратегию). Попросите объяснить, в чем же состоит стратегия. Далее, пусть ученик напишет инструкцию, пользуясь которой любой (например, вы, а лучше его ровесник) сможет выигрывать в полоску. Когда инструкция будет готова (это вряд ли произойдет на том же уроке, когда ученик догадается до решения), сыграйте с ним, действуя по инструкции. При этом старайтесь проявить ошибки в инструкции, то есть проиграть.

Заключение

Вариации задачи. Вот возможные усложнения игры (если не оговорено противное, меняется только игровое поле).

1. Игровое поле не полоска, а колечко, разбитое на клетки.

2. Игровое поле — это полоска высоты 2. Закрашивать можно две клетки, которые соседствуют как по горизонтали, так и по вертикали (но не по диагонали).

3. Игровое поле — произвольный прямоугольник размера $m \times n$ клеток.

4. Игровое поле — произвольный «ящик», разделенный на «ячейки». Каждым ходом можно заполнить одну или две соседние по грани ячейки.

5. Рассматривается поле в виде произвольного прямоугольника (как в задаче 3). За один ход разрешается (кроме того, что было разрешено раньше) закрашивать и другие фигурки. Например, три соседние клетки — в виде полоски или уголком, четыре соседние клетки и т.п.

6. Можно рассматривать «доски», разбитые не на квадраты, а на треугольники или шестиугольники (как соты).

7. Можно, наконец, попросить учеников придумать свой вариант игры, то есть описать: а) какие поля допустимы (они могут состоять из нескольких кусков!); б) что можно закрашивать за один ход.

Игры 1–3 достаточно просты. Для колечек (игра 1) из одной или двух клеток «в один ход» побеждает тот, кто ходит первым. Для колечек большей длины, наоборот, всегда выигрывает тот, кто ходит вторым («черные»): первым ходом «белый» превращает кольцо в уже знакомую нам полоску. Метод выигрыша для игр 2 и 3 (игра 2 — частный случай игры 3 при $m = 2$) похож на описанный выше метод выигрыша при игре в полоску. Он частично обсуждается в Приложении. Отметим, что ходить первым хорошо вовсе не для всех размеров доски $m \times n$.

Игра 4 является обобщением игры 3 (прямоугольники «в несколько этажей»). Поиск метода выигрыша в ней также осуществляется в русле уже обсуждавшихся идей.

Три следующие «игры» (4–6) — это не игры в точном смысле слова, а направления, в которых можно фантазировать, если будет желание заниматься игрой в полоску еще.

Что получил ученик? На этот вопрос трудно ответить: ответ будет зависеть от ученика, учителя и многих привходящих обстоятельств. Попробуем перечислить — что ученик *наверное,* получил, играя в полоску. Конечно, он научился играть в полоску и получил возможность хвалиться этим перед родителями, друзьями и знакомыми. Но, кроме этого, получил:

- опыт успешного решения достаточно трудной задачи;
- опыт «исследовательской» работы (достаточно долгое, *поэтапное,* решение задачи, уточнение — частично самостоятельное — постановки задачи по ходу работы);
- опыт выдвижения гипотез, их верификации (самопроверки) и, если нужно, исправления и уточнения;
- опыт записи и объяснения полученного решения.

Состоялось:

- знакомство с методикой исследования «от простого к сложному», с понятием «размера задачи»;
- знакомство с понятиями «игра», «позиция», «выигрышная стратегия»;

- знакомство с понятием эквивалентности;
- знакомство с идеей сведения задачи к уже известной;
- знакомство с понятиями симметрии и преобразования геометрических фигур.

Все это представляется нам главным итогом игры в полоску с ребенком.

Приложение

Как выигрывать в игре в полоску

Правильное решение. В этой игре всегда (то есть при любой длине полоски) нужно играть первым. Первым ходом нужно закрасить середину — одну клетку, если длина полоски нечетная, и две клетки, если длина четная. После этого полоска разделится на две одинаковые части. В ответ на любой ход противника мы будем закрашивать *такие же* клетки на противоположной стороне.

Скорее всего, ученик напишет что-то в этом роде. Это правильное в основном решение. Но оно требует: 1) уточнения — что значит «такие же клетки» и 2) доказательства правильности. Кроме того, это, строго говоря, не единственное решение.

Ученики, говоря «такие же клетки», обычно имеют в виду клетки, симметричные относительно середины полоски. То, что правильность метода нужно доказывать, ученикам (особенно начальной школы) в голову не приходит. Это и не нужно. Решение, приведенное выше, сопровожденное уточнением, что такое «такие же клетки», а также рисунками и примерами (как это сделано в этом тексте), — это замечательный результат работы ученика (и учителя).

Мы же здесь опишем тонкости, оставшиеся за кадром.

Что значит «такие же клетки». Занумеруем клетки левой половинки, скажем, слева направо (рис. 7,*а*). Теперь нам нужно для каждой из этих клеток найти соответствующую клетку в правой половинке. Соответствие должно быть взаимнооднозначным: разным клеткам из левой половины должны соответствовать разные клетки из правой половины. Такое соответствие проще всего задать, перенумеровав клетки в правой половине. Тогда клетки с одинаковыми номерами и будут соответствовать друг другу.

Чтобы можно было воспользоваться нашей стратегией, должно выполняться следующее свойство («непрерывность»): «Если две клетки в одной из половинок соседние, то и соответствующие клетки в другой половине — соседние».

а)

1	2	3	4	5	6	7	8		1	2	3	4	5	6	7	8
	B1	B1		A3				A1		A2	A2		B2			

б)

1	2	3	4	5	6	7	8		8	7	6	5	4	3	2	1
	B1	B1		A3				A1				B2		A2	A2	

Рис. 7. Два разных способа повторения ходов. Соответствующие друг другу клетки имеют одинаковые номера. При варианте «а» левая полоска как бы сдвигается вправо. При варианте «б» — отражается относительно средины полоски.

Легко видеть, что есть ровно два способа перенумеровать правую половинку так, чтобы выполнялось свойство непрерывности: строго слева направо (рис. 7,*а*) или строго справа налево (рис. 7,*б*). Установление соответствия часто удобно представлять себе как совмещение соответственных клеток. Первый способ соответствует тому, что мы «вырезаем» левую полоску и сдвигаем ее вправо («сдвиг»), второй — тому, что мы перегибаем полоску посередине («отражение» или «зеркальная симметрия»). Таким образом, приведенное вначале решение может быть уточнено двумя различными (но равно годящимися) способами: с помощью сдвига или симметрии. По не вполне понятным причинам ребята, как правило, имеют в виду симметрию.

С точки зрения математики между этими способами есть важное отличие. Сдвиг не является непрерывным, если принять во внимание серединку: 1-я клетка правой половинки соседствует с серединкой, а 1-я клетка левой половинки — нет. Отражение же является непрерывным и в этом, более сильном, смысле. Для исходной постановки задачи это различие несущественно. Ситуация меняется при переходе к более сложным задачам, упоминавшимся в «Заключении»: симметрия допускает естественное обобщение на эти задачи, а сдвиг — нет. Может быть, ученики это интуитивно чувствуют?

Здесь еще с одной стороны проявляется понятие эквивалентности: методы, равноправные («эквивалентные») с точки зрения одной задачи, перестают быть таковыми при переходе к более сложным задачам. С еще одной подобной ситуацией мы встречались ранее: для полоски длины 7 «побочное» решение (рис. 6) ничем не хуже основного (рис. 5,*а*). Однако ситуация меняется, если мы хотим найти просто описываемую стратегию, пригодную для полосок любой длины.

Возвратимся к соответствию между половинками полоски с помощью симметрии. Математики обычно говорят об отображении всей полоски в себя (если длина полоски нечетная, то средняя клетка остается на месте; если длина четная, то средние клетки меняются местами). Геометрически симметрию можно представить двумя способами. Один уже упоминался: перегнуть полоску относительно серединной вертикальной оси (осевая симметрия). Другой (кстати, менее привычный для школьников) — повернуть всю полоску на 180° относительно центра полоски (центральная симметрия). Для полоски высоты 1, с которой мы имели дело до сих пор, обе геометрические процедуры приводят к одинаковому соответствию между клетками. Однако уже для полоски высоты 2 ситуация меняется. Как видим, и здесь мы встречаемся с относительностью понятий «одинаковое» — «разное».

Доказательство правильности. Доказать нужно вот что. Пусть противник закрасил какие-то клетки на одной из сторон. Тогда «такие же клетки» на другой стороне должны быть свободными — иначе мы не сможем реализовать свой метод! Чтобы доказать это, достаточно заметить, что после нашего хода обе части закрашены одинаково**.** Такое свойство называется *инвариантом метода.* Это еще одно важное понятие. Для учеников младшей школы понятие инварианта достаточно трудное. Заниматься формальным доказательством с ними не нужно. Но обратить внимание на красивый и наглядный факт полезно.

◀ Вернуться к содержанию

Введение понятия несоизмеримости в V классе[1]

САМОХВАЛОВ Петр Алексеевич

Работа с незначительными сокращениями и редакционной правкой публикуется по рукописи: «Отчет и.д. штатного преподавателя 2-го кадетского Императора Петра Великого корпуса — Петра Алексеевича Самохвалова. Приложение I. Введение понятия о несоизмеримости», хранящейся в Российском военно-историческом архиве (РГВИА. Ф. 725. Оп. 53. Д. 4057). Некоторые факты позволяют утверждать, что этот отчет П.А. Самохвалов составил в 1913–1915 гг.

Курс пятого класса по геометрии впервые знакомит учеников с измерением геометрических протяжений и подобием фигур. Вот две основные вещи, которые нужно усвоить ученикам. Я остановлюсь сейчас на первом.

При теперешнем положении дела, когда нет пропедевтического курса геометрии, ученики не имеют к пятому классу ясного представления об измерении. И поэтому им прохождение курса в том виде, как это делается теперь при наличности ходовых учебников, кажется непостижимым, странным.

Следует сначала поставить на вид все геометрические протяжения, которые могут быть измерены: прямолинейные отрезки, дуги одного радиуса, углы (и двугранные), площади (прямоугольников, параллелограммов, треугольников, вообще многоугольников), объемы (параллелепипедов, призм, пирамид).

Затем ученик должен себе отчетливо представить и закрепить в своем уме, что при всяком измерении имеют дело не с одним, а с двумя представителями какого-либо геометрического протяжения. Ввиду этого в начале не следует позволять ученику говорить, например: «Измерить отрезок», а он должен говорить полную фразу: «Измерить один отрезок другим отрезком».

Следует остановиться, между прочим, на непосредственном измерении площадей, чтобы утвердилось представление об измерении площади площадью непременно, а не отрезком. Для этого можно предложить измерить площадь доски, книги и т.п. Можно предложить измерить квадратным вершком площадь какой-либо фигуры не стесняясь ее формой, хотя бы такого вида (см. рис.). Вычисление площади может быть иногда только приблизительно, — не в том сила.

Если разобраны площади, то с объемами ученики справятся, по крайней мере, теоретически, по аналогии. Когда ученики получат некоторый вкус к измерению и вместе с тем приобретут несколько практических сведений, тогда только они в состоянии будут «вышивать разные узоры» вроде общей (наибольшей) меры соизмеримых и несоизмеримых между собой отрезков, отношения двух отрезков и т.д. и т.д. И, вышивая эти узоры, они будут иметь дело не с мертвыми фразами и темными формулами, а с живой действительностью, переплетенной и скрепленной этими формулами. И я не вижу необходимости ограничиться сначала рассмотрением только измерения длин, оставляя в стороне измерение площадей и объемов. И посильность впечатления от этого нарушится.

[1] Публикация О.А. Саввиной.

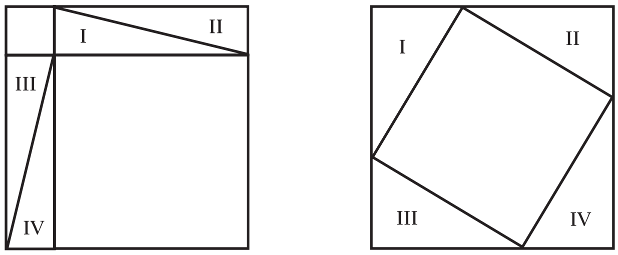
Я считаю полезным, чтобы к тому времени, когда ученикам придется иметь дело с несоизмеримыми отрезками, ими было усвоено извлечение корня квадратного из чисел точно и с приближением. Необходимо, чтобы к этому моменту они обладали идеей несоизмеримого числа из алгебры. Соответствующие в этой области замечания будут сделаны ниже.

А теперь перехожу к своему предмету. Пример несоизмеримых отрезков, представленный в геометрии Киселева (равнобедренный треугольник с углом $\frac{2d}{5}$ и квадрат в последнем издании) не совсем прост логически и совсем не прост психологически и кажется притянутым насильно.

Дело здесь не в трудности, они с удовольствием преодолеют трудность, если они увидят цель, если они убеждены, что это стоит того, чтобы поработать.

Я бы предложил поступить здесь так. В согласии с тем, что я выше говорил, я предлагаю ученикам элементарное измерение площадей. (Как мы скажем для себя, они знают измерение площадей прямоугольников, когда линейные размеры выражены в какой-нибудь линейной единице соизмеримыми числами. Киселев сам в последнем издании излагает это иначе, чем прежде.)

И вот, им можно привести доказательство теоремы Пифагора хотя бы в таком виде (см. рис.).



Здесь уже, между прочим, будет уместно показать, как приводятся площади треугольника, параллелограмма, прямоугольника одна к другой.

Бояться же того, что такое изложение непоследовательно, по меньшей мере, наивно. Чем больше им сообщить фактов из области измерительной геометрии (причем легко проверяемых и даже доказываемых), тем лучше. В свое время, через полгода, они еще раз получат строгое, теоретическое подкрепление своих сведений, от этого дело только выиграет.

Здесь, как и везде, надо поступать согласно одному из правил: «сначала предмет сам по себе, а потом относящиеся сюда правила». Из всего этого материала мы остановимся на теореме Пифагора. Когда ученики прочувствуют ее, то нужно дать им несколько примеров. Задать им катеты:

(3; 4); (6; 8); (1,5; 2); (0,3; 0,4); ...; (5, 12); (0,5; 1,2); ...; (7; 24); (0,7; 2,4)...

и предложить отыскать гипотенузу.

Ученик находит элементарным способом сумму площадей квадратов, построенных на гипотенузах (подразделением их на квадратики со стороной 1 или 0,1, смотря по заданию). По теореме Пифагора заключает, что таковая как раз и должна быть площадь квадрата, построенного на гипотенузе; догадается найти и длину самой гипотенузы либо сразу, либо извлечением корня (настолько догадливости у всякого хватит, особенно если к этому времени, как предлагается, извлечение корня пройдено)[1].

Затем они сами пожелают брать для катетов какие угодно числа. И это следует представить. Тут они и натолкнутся на препятствия. Вся жизнь состоит в преодолении препятствий, от этого люди только умнеют.

Предложить ученику здесь самое простое: один катет со стороной, равной 1 лин. единицы, и другой катет 1 лин. единицы. Он вычислит, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, заключает в себе 2 соответствующих квадратных единицы. Здесь длину гипотенузы так просто уже не найдешь: 1 лин. единица мало, 2 — много; $1\frac{1}{2}$ — много; $1\frac{1}{4}$ — мало и т.д. В целях дальнейшего (теории пределов) полезно расположить эти числа в два ряда — один убывающий, другой — возрастающий:

$$2;\ 1\frac{1}{2};\ 1\frac{7}{16};\ \ldots. \qquad 1;\ 1\frac{1}{4};\ 1\frac{3}{8};\ \ldots.$$

Здесь также уместно будет предложить воспользоваться десятичными дробями. Опять получат два ряда:

2; 1,5; 1,42; ... 1; 1,4; 1,41;...

Одним словом повторяется та же история, что и при извлечении $\sqrt{2}$, но ученики проделают эту историю еще раз. Некоторые догадаются сразу, в чем дело; но большинство будет упорствовать и искать.

Наконец, так или иначе, но ученики придут к заключению, что длина гипотенузы в нашем случае невыразима ни в единицах, ни в каких-либо долях (способ доказательства, если понадобится, от противного).

Но тем не менее, эта длина существует, и она содержит в себе нашу единицу, но сколько раз? Надо же выразить это каким-либо числом. Конечно, они сами это найдут, а в противном случае слишком легко подвести их к тому, что это и есть то самое число, для которого раньше был символ $\sqrt{2}$. Возможно, как это я предложил, что здесь будет двойная работа с $\sqrt{2}$ в алгебре и геометрии. Но в таком щекотливом месте не вредна и многократная разработка вопроса, особенно, если она проводится с разных точек зрения.

После этой работы они оценят такой знаменитый треугольник, как мифический со сторонами 3, 4, 5. Здесь же, между прочим, надо дать им понять всю силу и гибкость ума греков, которые, не имея под руками соответствующего алгебраического материала, догадались и доказали, что диагональ квадрата невыразима никаким числом, если сторона квадрата принята за линейную единицу.

Исторически, правда, несоизмеримые отрезки вышли на сцену раньше несоизмеримых чисел. Но это объясняется философским складом ума греков, которые считали геометрию наукой, достойной всяческого изучения и презирали «ремесленную» науку счета.

---

[1] Весьма полезно для дела и интересно для учеников заставить их проводить найденные ими теоретически длины гипотенуз на практике. Здесь весьма удобна клетчатая бумага. — *Примеч. авт.*

Мы же находимся в ином положении; например, еще в четвертом классе мы знакомим учеников с отрицательными числами (а можно было бы и ранее, не считаясь с тем, что исторически отрицательные числа получили право гражданства в математике сравнительно недавно)...

. . . .

И в заключение скажу, что я не нахожу другого средства, как, во-первых, подготовить почву, заставив учеников ближе приглядеться к самому факту измерения; во-вторых, внедрить в сознание учеников сначала идею несоизмеримости числа, как более доступную им, и уже затем только воспользоваться хотя бы и учебником Киселева, расположив материал соответствующим образом.

Теперь перехожу к наиболее интимной стороне дела, но уже в области алгебры.

Во-первых, как заставить учеников примириться с существованием несоизмеримых чисел; и, во-вторых, как показать, что идея несоизмеримостей, общнее невыразимости какого-нибудь нового понятия при помощи прежних понятий, присуща человеку вообще, и не только в области математики.

Подобные рассуждения, по моему мнению, необходимы в классе. Если это и не приохотит учеников к материалу, то, по крайней мере, они не будут смотреть на математику, как на нечто совсем особенное, чуждое, стоящее отдельно от других наук и от природы.

Переход от счета единицами к счету десятками, сотнями, ..., дюжинами делается учениками легко, также легко они переходят и к счету долями единицы (правда, в области бесконечных десятичных дробей их легко можно было бы натолкнуть на препятствие, но мы этого избегаем). Там даже символистика облегчает ему дело:

576 — 6 единиц, 7 — на втором месте, следовательно, 7 счетных единиц 2-го разряда, т.е., десятков;

57,654 — аналогично;

$\frac{5}{8}$ — тоже на виду и величина долей и число их. Все видно и понятно. Здесь же и символистика $\sqrt{2}$ мало делу помогает. Что такое? Какое-то туманное пятно; определение туманное и вообще почти ничего не дающее в смысле непосредственного значения величины.

С каким ожесточением они набрасываются на эту неприступную для них стену, все время ищут подходов, нельзя ли в каком-либо месте пробить брешь, хотя бы это было и не так легко, как для некоторых случаев: $\sqrt{4}$; $\sqrt{9}$;...; $\sqrt{225}$... Как же это так? Все до сих пор было отчетливо, ясно. Столько-то единиц, столько-то таких-то долей. И вдруг $\sqrt{2}$. Доказательство того, что $\sqrt{2}$ не есть целое число ни единиц, ни каких-либо ее долей, это они слышали. Но на это не обращается никакого внимания и в высокой степени презирается.

До сих пор сами приучали к ясности, точности, определенности, а тут такого тумана напускают. Детской душе все ясно представляется, она способна верить, она не терпит тумана.

Но логические доказательства не для них. В этом переходном возрасте они только-только начинают мириться с логичными доказательствами. Но базироваться исключительно на них никак невозможно. Да, и вообще в истории, когда человек столкнулся впервые с такими диковинками как $\sqrt{2}$; -5; $2+3\sqrt{-1}$, он их просто-напросто не признавал, называл их невыразимыми, абсурдными, мнимыми, он исключал их из области своего рассмотрения, отталкивал их. Но они назойливо лезли, время их приспело, и они попадаются человеку-математику на каждом шагу.

Тогда он волей-неволей всматривался в своих врагов, изучал их, мирился с их существованием, как с неизбежным злом, и кончал тем, что включал их в область чисел, и даже праздновал победу, считал, что сделал важное приобретение.

Этот исторический ход вкратце наблюдается и у мальчугана. И наша обязанность помогать ему при этом, не насиловать его, не торопить, дать пройти все стадии: изумления, недоумения, негодования, изучения, примирения и, наконец, полного усвоения и включения чисел новой природы в круг своих знаний.

Мы, педагоги, совершаем ошибку, когда думаем, что всегда можно сразу ввести ученика в сферу известных идей. Во многих случаях это по существу дела невозможно. Стадию недоумения, изумления иной раз никак не обойти, если не действовать только обманным путем, или замалчивая, но зато потом ученик (как ученик — не больше) заклеймит математику именем фокусничества. Но, конечно, избави Боже довести ученика до этой стадии и тут его бросить.

Само собой разумеется, ему надо помочь выбраться отсюда. И для этого нужно: во-первых, упорная работа со стороны ученика и, во-вторых, — время. В таких местах нельзя быстро идти.

Надо дать ему время обдуматься, оглядеться в новой обстановке, освоиться в ней. Он должен приглядеться к $\sqrt{2}$; изучить его.

Здесь уместно будет спросить ученика, а все ли он представляет себе отчетливо. Знает ли он, например, своего соседа абсолютно, совершенно точно. Выясняется, что нет, знает, что он лучше (хуже) него учится. Но ведь и $1<\sqrt{2}<2$; $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5\ldots$ Таким образом, уже известно многое относительно $\sqrt{2}$. Можно указать один, два, даже много признаков своего соседа, но чужая душа — потемки; и в конце концов его сосед — это тоже туманное пятно. Но сосед все-таки существует, он есть, независимо от того, хорошо знает его другой, или нет. Примеры подобного рода (подборы их зависят от искусства учителя) заставляют ученика мириться с существованием невыразимого, несоизмеримого, в частном случае $\sqrt{2}$. Правда он еще долго будет бунтовать против $\sqrt{2}$, не прощать ему того, что оно не выражается ни в единицах, ни в долях. Но здесь его можно окончательно примирить с $\sqrt{2}$, призвав на помощь геометрическое представление.

Как «собственное число» оно ему не дается; ученик и готов бы признать $\sqrt{2}$, но ему бы только увидать его. И вот геометрия ему показывает, что если сторона квадрата 1, то его диагональ $\sqrt{2}$. Ученик в радостном изумлении: он увидел $\sqrt{2}$, как своего соседа видит, $\sqrt{2}$ воплотилось.

Таким образом, алгебра и геометрия, идя рука об руку, помогают ученику уяснить идею хотя и несоизмеримого, но существующего, тем не менее.

Вернуться к содержанию

Опыт фронтального ведения курсовых работ школьников

МЕДВЕДЕВ Кирилл Владимирович
учитель математики ГОУ Лицей «Вторая школа»,
преподаватель кафедры информатики социальных
процессов МГУ им. М.В. Ломоносова
medvedev.kv@gmail.com

В статье речь пойдет о результатах эксперимента по активизации исследовательской деятельности учеников, проведенного мною в Лицее «Вторая школа». Этот эксперимент был пилотным, и его положительный исход заранее не был ясен. Не все получилось так, как было задумано. Многие моменты вызывают неоднозначную оценку и у меня, и у моих коллег. Я благодарен администрации своей школы, которая позволила провести эксперимент в полном объеме, а также родителям моих учеников, которые поддержали эту затею.

Активизировать исследовательскую деятельность учащихся планировалось с помощью *курсовых работ* – рефератов с элементами исследования. Курсовая работа не требует подбора большого количества творческих задач, которые учащиеся должны обязательно решить. Курсовая работа может быть плохой, если это просто реферат, и хорошей, если просматривается исследовательская ниточка. Курсовые работы способствуют развитию общих учебных навыков таких, как умение задавать себе вопросы, формулировать свои мысли, вести диалог и слышать аргументы других людей, презентовать результаты своего труда.

Курсовые работы, так же как и в вузе, предлагались на большой срок с расчетом, что их выполнение заставит школьника подняться на новый уровень, вырасти над собой. В процессе работы над своей курсовой каждый ученик должен был освоить азы исследовательской деятельности. В частности, поиск и обработка источников являлись неотъемлемой частью работы.

Приветствовалось использование новых, незнакомых или непопулярных инструментов в своей работе. Это могло быть использование LaTeX'а или Scientific WorkPlace, разнообразных средств программирования или математических пакетов, представление результатов в виде презентации или HTML. Непривычный инструментарий служил для более глубокого погружения в новый вид деятельности.

Курсовая работа должна была быть представлена для ознакомления преподавателя и одноклассников и публично защищена.

Теперь о том, как была организована работа. Каждый ученик в классе был обязан работать над курсовой работой в течение года. В эксперименте руководство 20 школьниками осуществлял один человек, который выступал в роли консультанта. Тем самым ответственность за результаты была возложена на плечи школьников. При этом ни за одного школьника не пришлось писать ни одного слова.

Научное руководство работами школьников предполагает, что преподаватель достаточно компетентен в каждой теме, в моем эксперименте этого не было.

Я руководил курсовыми, которые включали материал, мне неизвестный. На первый взгляд здесь есть противоречие: как можно руководить работой, не разбираясь в ней? Однако противоречия здесь нет. Ведь главным было не столько получить какие-то выводы, сколько преодолеть препятствия, почувствовать вкус к исследовательской работе.

Курсовые работы были введены в 10-м классе. Все первое полугодие ушло на выбор и согласование тем, планирование исследований с учетом индивидуальных особенностей учеников и на их «раскачку». Изначально предлагалось выбирать тему в трех направлениях (детальный список направлений можно найти на странице http://www.l2sh.ucoz.ru/publ/1-1-0-23):

1) школьный взгляд на большую науку;
2) методическое направление;
3) историческое направление.

Активная работа началась в основном зимой.

Консультируя своих учеников, я выслушивал их, давал советы, помогал развивать идеи (даже те, которые могли завести в тупик). Мы обучались навыкам полноценного научного исследования, пытались вникнуть в различные аспекты научной деятельности. Не имея возможности дотянуться до серьезного научного исследования, мы стремились проникнуться его духом. Работая в таком режиме, можно было обсуждать с учащимися широкий спектр тем: от систематического описания фракталов до прогнозирования цен на цветные металлы на мировых биржах.

Для поддержки плодотворной рабочей атмосферы было выделено время на кружке для регулярного обсуждения проблем и достижений учеников. Проведение таких занятий, моделирующих научный семинар, позволяло не только отслеживать развитие интереса ученика к избранной теме в процессе работы, но и стимулировать труд других учеников. Интерес и любопытство к труду своих товарищей работали на создание рабочей атмосферы в коллективе.

Оказалось, что подобная исследовательская деятельность без претензии на серьезный результат восстанавливает мотивацию некоторых учеников, которых обычно причисляют к «средним» по успеваемости. В моем эксперименте один из таких учеников, заинтересовавшись своей темой — «Геометрические преобразования: инверсия. Обзор» — начал сам читать книги и решать содержащиеся в них задачи, забрасывая меня вопросами по электронной почте.

Работа над курсовыми заставила школьников задуматься над тем, что такое научное исследование, возможно ли открыть что-либо новое, чем живет наука.

Подавляющему большинству было важно и интересно довести работу до конца и публично ее защитить. Не зная, чем закончится мой эксперимент, я не планировал приглашать большое число экспертов на защиту. Поэтому на защите сами же ученики выступали в качестве жюри. И большинство отнеслось к этому очень серьезно.

Закончили мы в мае, пропустив через публичную защиту 27 человек, в том числе и учеников из другого класса, вдохновившихся примером своих друзей. Пришлось устраивать после уроков два заседания продолжительностью несколько часов, чтобы выслушать всех. Основная масса школьников стойко выдержала этот тяжелый марафон.

Некоторые из юных исследователей собираются продолжать свои изыскания, кое-кто из них атаковал меня в середине лета, чтобы обсудить новые темы и подходящую литературу.

На волне интереса происходили и другие любопытные вещи. Один ученик, пытавшийся проработать модели прогнозирования цен на металлы на ведущих мировых биржах, получил диплом на олимпиаде по знанию финансовых рынков, хотя его курсовая до конца доведена не была. У второго ученика к работе подключился один из его родителей, и они узнали друг о друге много интересного.

Конечно, выявилось и много проблем. В частности, сложности с подбором тем и исследовательских задач. Также стало ясно, что подобную деятельность надо начинать раньше 10-го класса.

В заключение приведу темы курсовых работ, над которыми работали мои 10-классники.

Темы реальных курсовых работ 2007/2008 учебного года
(удавшихся и не очень)

1. Видовой анализ ценозов различной природы.
2. Статистический анализ успеваемости по спецматематике.
3. Сравнение сложности вступительных экзаменов в МГУ за последние 40 лет.
4. Элементы теории вероятностей. Разработка и проведение вводного занятия (пропедевтика).
5. Интерполяция функций: обработка результатов опыта.
6. Классификация фракталов. Моделирование фракталов на компьютере.
7. Геометрические преобразования: инверсия. Обзор.
8. Приближение показательной функции последовательностью многочленов.
9. Теория вероятностей в играх. Азартные игры.
10. Геометрические фракталы. Кривая Коха.
11. Элементы теории чисел. Разработка учебного пособия.
12. Классификация кривых второго порядка. Приложения.
13. Симметрия в алгебре и не только.
14. Бизнес аналитика: школьный уровень.
15. Разработка наглядного пособия по использованию техники оригами для создания иллюстраций к стереометрическим задачам.
16. Элементы теории игр. Игры с нулевой суммой.
17. Элементы теории графов. Разбор игры Untangle.
18. Элементы теории вероятностей. Приложения метода Монте-Карло.
19. Применение статистических методов на практике: обмер кирпичной кладки, периметра озера Глубокого.
20. Классификация логарифмических уравнений с параметром.
21. Создание пособия по нестандартным методам решения задач.
22. Математическая модель определения критических значений экономических показателей.

Вернуться к содержанию

Организация исследовательской деятельности школьников в школе «Интеллектуал»

НЕТРУСОВА Наталья Михайловна
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
natnetint@gmail.com

В статье речь пойдет именно об организации. За рамками статьи останется ряд вопросов типа «Какие задачи предлагаются школьникам для исследования?» или «Откуда брать задачи?». Эти вопросы уже рассматривались[1].

Ниже часто употребляется слово *проект* – так в нашей школе называется принятая форма исследовательской деятельности школьника.

Школе «Интеллектуал» всего пять лет, поэтому опыт сравнительно небольшой. Итак, как нам представлялась организация исследовательской деятельности, когда мы были в начале пути?

В сентябре каждая кафедра *вывешивает список возможных тем проектов*. В течение года в любой момент школьник может подойти к любому учителю и сказать, что хочет делать проект, то есть тем самым выбрать руководителя и вместе с ним тему. В течение какого-то времени школьник вместе с руководителем работают над темой. То есть работает в основном школьник и регулярно рассказывает руководителю о результатах; руководитель предлагает идеи, помогает разбить задачу на более простые, рассказывает о каких-то методах, неизвестных школьнику, но применимых в данной работе. Проекты выполняются индивидуально или группами по 2–3 человека. Каждый школьник должен за год сделать хотя бы один проект, на это отводится полгода. В конце декабря и в конце мая проходят *конференции*, на которых учащиеся докладывают результаты, полученные в ходе работы над проектами. В идеальной ситуации ребенок в сентябре выбирает тему, к декабрю доделывает проект и, доложив результаты на декабрьской конференции, продолжает работать над ним дальше или берет новую тему.

На конференции заслушиваются доклады по секциям (каждый доклад по 20 минут), после чего проводится пленарное заседание, на котором заслушиваются лучшие доклады, сделанные на секциях.

В первый год работы школы проекты вызвали большой ажиотаж. Поработать над проектами успели более 90% школьников. Также первый год показал, что работы сильно разнятся по качеству и глубине исследования – от рефератов до серьезных самостоятельных работ.

---

[1] См.: *Сгибнев А.И.* Исследуем на уроке и на проекте // Учим математике (материалы открытой школы-семинара учителей математики) / Под ред. А.Д. Блинкова, И.Б. Писаренко, И.В. Ященко. М.: МЦНМО, 2006. С. 59–71. (http://math.ru/teacher/db/book06/10_sgibnev.pdf). *Сгибнев А.И., Шноль Д.Э.* Исследовательские задачи при обучении математике в школе «Интеллектуал» // Математика. 2007. № 12. С. 17–22. (http://int-sch.ru/docs/articles/sgibnev/projects.pdf)

В последующие два года школьники брали много проектов, в результате чего возросла нагрузка на учителей — руководителей проектов. За год закончить работу над проектом успели не все учащиеся: либо тема оказалась слишком большой, либо не хватило сил руководителя, либо еще по каким-то причинам. Учитывая такие итоги, было решено отказаться от идеи, согласно которой каждый ученик обязан выполнить проект.

На следующий год школьники выбрали темы проектов значительно позже. Активность школьников наблюдалась при вывешивании тем, далее был спад активности (в течение полугодия) и новый резкий ее скачок за две недели до конференции. Поскольку выполнить проект престижно, то, осознав, что конференция скоро, многие школьники активизировались и решили за две недели выполнить проект.

В результате к моменту декабрьской конференции многие проекты были не готовы. Чтобы в этих условиях в проведении конференции был какой-то смысл, учителями *было предложено классифицировать работы и рассматривать их по жанрам*.

Были выделены следующие жанры.

– По уровню работы:

1) реферат;

2) исследовательская работа начального уровня (в том числе практическая);

3) научно-исследовательский проект.

– По степени готовности работы:

1) декларация намерений (школьник докладывает постановку задачи, план действий, какие-то уже возникшие гипотезы);

2) доклад о текущих результатах;

3) итоговый отчет.

Введение жанров позволило школьникам осознать, что реферативная работа ценится меньше самостоятельного исследования, поэтому реферативные работы по математике, биологии, физике и истории практически исчезли.

После того, как почти все работы перестали быть реферативными, основные усилия преподавателей направились на выполнение следующих условий:

1) чтобы дети не тянули с выбором тем;

2) чтобы работа над темой была регулярной и не прекращалась в течение полугодия;

3) чтобы дети уделяли внимание качеству текста, написанного по итогам работы, и качеству доклада на конференции.

О тексте и докладе стоит сказать отдельно. Когда школьник работает над проектом, ему очень интересно, работа его захватывает. Но когда речь заходит о написании текста, интерес резко снижается. Работать с текстом тяжело; что именно требуется, плохо понятно. Руководитель объясняет, каким должен быть текст, что для этого надо сделать, но текст как результат не столь интересен учащемуся, сколь результат самой работы. На этом этапе его активность снижается (вплоть до готовности оставить работу и взяться за другую задачу).

Перейдем к докладам. Обычно школьник умело подготавливает презентацию, а затем учится быстро рассказывать (или, хуже того, зачитывать) свой текст. При этом он редко смотрит на свой доклад с позиции слушателя. Возникает ощущение, что цель школьника — доложить, отчитаться, успеть рассказать, а все остальное не важно. Возможности слушателей доклада вообще не учитываются. Вдобавок школьнику хочется рассказать всю свою работу, включая мелкие подробности доказательств. Это и понятно: школьнику важна каждая мелочь его собственного открытия. Каждое доказательство доставило ему радость, и этой радостью он хочет поделиться со слушателями. Однако слушатели теряют нить рассказа: часть определений не сформулирована (для докладчика они естественны), некоторые определения и утверждения мелькнули на слайдах презентации и исчезли до того, как их кто-нибудь прочел, остальное докладчик быстро произнес и продолжил рассказ — до того, как кто-либо понял сказанное ранее. Поэтому, когда дело доходит до подробного доказательства, слушателям уже ничего не понятно. Впрочем, даже если понятно, вникнуть в тонкости доказательства во время 20-минутного доклада на конференции невозможно. Слушателей в основном интересуют идеи, на которых основано доказательство, и конкретные примеры. Но донести до школьника-докладчика, чего от него ждет слушатель, очень сложно.

Для повышения качества докладов был предложен *механизм рецензирования работ*. За неделю до конференции школьник докладывает свою работу рецензенту — другому учителю с той же кафедры. Рецензент формулирует свои замечания. Таким образом, все трое — школьник, руководитель и рецензент — работают над качеством доклада.

Практика показала, что конференция по отдельным секциям — неправильная форма представления работ. Слушатели секции практически не могут перейти с одной секции на другую, вынуждены слушать все доклады секции, хотя некоторые из них могут быть им недоступны в силу возраста. В результате слушатели вникают не во все, что слушают, их интерес к происходящему снижается. На Летней школе интенсивного обучения «Интеллектуал» мы опробовали жанр *стендовой конференции*, давно отработанный в Зимней Пущинской Школе. Стендовая конференция состоит из нескольких серий. В каждой серии часть школьников на отведенных им стендах презентуют свою работу тем, кто подошел послушать. В следующей серии часть слушателей становятся докладчиками, а докладчиков — слушателями. При этом каждый школьник несколько раз повторяет свой доклад маленькой группе слушателей, подошедшей к его стенду. А каждый слушатель слушает то, что ему интересно, и сразу спрашивает, если непонятно.

В заключение скажем о планах на будущее. С учетом имеющегося опыта работу над проектами по математике мы планируем организовать следующим образом.

1. В сентябре происходит выбор школьниками тем работ.

2. Далее начинает работать еженедельный семинар, на котором докладываются результаты работы. Для начала будут обсуждаться хорошие работы предыдущего года. Это даст возможность тем, кто еще только начал выполнять проект, иметь перед глазами пример хорошо сделанной работы. На доклад на семинаре отводится 45 минут. В качестве слушателей приходят те, кто заинтересовался темой, поэтому докладчик может подробно остановиться на доказательствах или на каких-то деталях своей работы.

3. За месяц до конференции будет проводиться рецензирование текстов работ. Каждая работа, прежде чем быть представленной на конференции, будет прослушана на кафедре математики.

4. Далее состоится конференция, возможно, в стендовом формате.

Приложение

Памятка для докладчиков математических проектов

Как готовить доклад

1. Старайтесь донести до слушателей идеи, а не подробности доказательств. Подробности обычно интересны и доступны лишь специалистам. Не пожалейте 3–5 минут на подробное изложение простого примера, а затем кратко скажите, как его удалось обобщить («я доказал, что то же будет выполняться и для всех простых n»).

2. Компьютер позволяет легко вывести на экран таблицу с экспериментальными данными в Excel, чертеж в «Живой геометрии» и т.д., которые сделают ваш пример наглядным. Но часто хватит и доски! Уберите из примера все лишнее и случайное, сосредоточьтесь на главном. Чертежи делайте с минимумом отвлекающих деталей, таблицу — только с необходимыми данными.

3. Собравшись доказать какое-то идейное утверждение, потрудитесь сначала ясно и корректно его сформулировать («Если: 1) можно построить правильный n-угольник и правильный k-угольник; 2) n и k взаимно просты, то можно построить и правильный nk-угольник»). Следите за обозначениями! Если n у вас вначале обозначало число сторон, то к концу оно не должно превратиться в длину отрезка!

4. Программой Power Point надо пользоваться очень осторожно. Она позволяет вставить в доклад много текста и картинок, которые не нужны. Перелистывание слайда за слайдом не оставляет ничего перед глазами у зрителей (в отличие от доски). Подбирайте читаемую комбинацию цветов. Из мелочей: не делайте фон белым и не пишите в конце «Спасибо!» оранжевыми буквами поперек экрана!

Как делать доклад

1. Вы рассказываете свою работу людям, поэтому обращаться надо к ним, а не к стене или экрану. Желательно следить за их реакцией и в случае непонимания остановиться и повторить подробнее. Стоять надо так, чтобы не загораживать от слушателей доску и/или экран. Помните, что кроме голоса, у вас есть еще много средств общения с аудиторией. Например, стоит показывать указкой на ту формулу, деталь чертежа или строчку таблицы, о которой вы сейчас говорите.

2. В начале доклада надо написать на доске свою фамилию, имя и тему доклада. Затем по ходу выступления там же должны появляться основные утверждения и результаты. (Выделите для этих целей часть доски, скажем, правую, с которой не будете ничего стирать.) Таким образом, к концу доклада вся его структура будет перед глазами слушателей, и они смогут задать вам вопросы.

3. Не читайте вслух формулы — пишите их! Не пишите длинные фразы — произносите их!

4. Слушателям будет интересно, если интересно докладчику.

◀ Вернуться к содержанию

Размышления

Методика обучения математике как научная дисциплина

ФИРСОВ Виктор Васильевич (1942–2006)

Введение

Математическое образование как область человеческой деятельности может рассматриваться с разных позиций: как искусство обучения математике, как соответствующее ремесло, как теоретическое знание о закономерностях такого обучения. Выбор одной из этих позиций предопределяет модель, в рамках которой мы ищем ответы на актуальные вопросы математического образования. Однако в конкретной практике обучения математике эти позиции не абсолютизируются и взаимно дополняют одна другую: там, где нет достоверного научного знания, помогают интуиция и опыт. Тем не менее, их повседневное использование не может служить доказательством ненужности или невозможности теоретического знания о математическом образовании.

В XX в. было осознано общечеловеческое значение массового математического образования: культурные образцы, ранее транслировавшиеся лишь для элиты, стали доступными для каждого гражданина планеты. Переход к общему математическому образованию инициировал накопление дидактической информации о закономерностях обучения математике, а затем и попытки ее осмыслить, т.е. придать ей статус научно организованного знания. Стала оформляться научная дисциплина, которая в СССР именовалась методикой обучения математике, в Европе — дидактикой математики, а в Западном полушарии — теорией математического образования.

К концу столетия соответствующая деятельность заметно активизировалась, что нашло свое выражение в бурном росте числа исследователей в указанной области, появлении авторитетных научных изданий (*L'Enseignement Mathématique*, *Jour-*

nal for Research in Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics*, *Nordisk Matematik Didaktik*), организации специализированных научных конференций и международных проектов типа *ICMI Study «Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity»*.

К сожалению, теоретическая проблематика оказывается далекой от сегодняшней практики российского математического образования. У нас сегодня правит бал воинствующая вкусовщина и подчеркнутое неуважение к попыткам теоретической рефлексии собственной деятельности. Учебники «с колес» идут в школу, системы образования скупаются через коррумпированных бюрократов целыми территориями, учитель оставлен без методической поддержки, педагогические исследования не финансируются. Теряются не такие уж многочисленные научные традиции советского периода, а сегодняшняя «методическая наука» сводится к вполне дискредитировавшей себя деятельности по защите диссертаций. Поэтому автор затрудняется сформулировать цель публикации настоящей статьи, содержание которой, по всей видимости, в сегодняшней России не нужно никому.

О специфике школьного предмета математика

Для определения самостоятельного научного статуса методики обучения математике принципиален вопрос о специфике математического образования, связанной с особенностями предмета математики. Мы ограничимся здесь анализом наиболее традиционной области приложения методики обучения математике — математическим образованием в массовой общеобразовательной школе.

Важнейшим проявлением специфики общего математического образования является *оригинальное целеполагание*, в котором формальные цели образования (воспитание и развитие ребенка) выступают наравне с реальными (усвоение математического содержания, умение применять математику к решению прикладных задач). Образно говоря, математику в школе изучают не только и, возможно, не столько ради усвоения собственно математики. Культурное значение школьного математического образования оказывается сопоставимым с культурным значением самой математической науки.

Школьная математика характеризуется *высокой степенью абстрактности* изучаемого материала, не имеющей близких аналогов в других школьных предметах. Объекты усвоения находятся в непрямой связи с действительностью. Парадоксально, но начальные понятия математики (число, множество, точка, пространство, и т.п.) часто даже более абстрактны, чем многие производные понятия. При этом большинство изучаемых в школе математических моделей представляют собой абстракции отнюдь не первого уровня. Соотнесение таких абстракций с действительностью часто выглядит искусственным. Более того, математический материал как бы сопротивляется попыткам примитивной анимации: так, объяснение правил движения шахматного коня посредством ссылки на прыжки реальной лошади мало способствует пониманию шахмат.

Логическая организация математической науки влечет за собой *глубокую иерархичность* построения школьных математических дисциплин, характеризуемых сильно развитыми внутрипредметными связями. Чтобы добраться до конкретной ветви, надо проделать длительное путешествие по всему математическому дереву: нельзя освоить дифференцирование без овладения тождественными преобразованиями алгебраических выражений, последнее — без усвоения арифметики дробей, а дроби — без знания таблицы умножения. Конструкция других школьных предметов скорее напоминает кустарник, в котором различные элементы мало связаны между собой (не нужно знать что-либо о климате Бразилии, чтобы запомнить столицу Великобритании).

Наконец, школьная математика выделяется *многообразием видов деятельности*, необходимых для освоения изучаемого материала. Эта характеристика становится особенно наглядной при сравнении математики с такими предметами, как история или география, при изучении которых превалирует один вид деятельности — запоминание. Отметим, что математическая деятельность высоко инструментальна, т.е. позволяет легко транслировать учащимся *образцы деятельности* посредством предъявления учебных задач, в ходе решения которых эти образцы реализуются.

Таким образом, поле приложения наших усилий — школьный предмет «математика» — обладает ярко выраженной спецификой, выделяющей его из числа других школьных предметов и приводящей к тому, что полученные теоретические выводы оказываются применимыми исключительно к обучению математике, но не другим дисциплинам. Иными словами, помимо общепедагогических фактов, утверждений и теорий существуют педагогические факты, утверждения и теории, относящиеся только к обучению математике (но не физике, истории, родному языку и т.п.). Указанного аргумента достаточно, чтобы признать за дидактикой математики право на самостоятельный научный статус.

К сожалению, при чтении иных работ в области математического образования обнаружить собственно математику не удается: их педагогическое содержание вполне относимо к обучению любому предмету. Из двух составляющих словосочетания *обучение математике* в расчет принимается только *обучение*, а *математика* проявляется лишь в качестве ритуального эпитета или антуража. Это немедленно выводит подобные работы за рамки рассматриваемой научной области. Более того, я полагаю, что в указанных случаях даже действительно ценные идеи не могут быть реализованы практически: общая педагогика и психология проникают в школу через предмет, будучи опосредованы и оплодотворены предметной методикой.

Математическое и гуманитарное в методике математики

В работах по методике обучения математике в неменьшей степени распространена и противоположная ошибка. Близость великого эталона теоретического знания — самой математики — часто дезориентирует начинающих специалистов, занятых исследованием проблем математического образования. Разрабатывая вопросы методики обучения математике, они стремятся копировать методологию и конструкцию математической науки.

Эта близость часто сбивает с толку даже опытных математиков-профессионалов, побуждая их с пренебрежением относиться к теоретическому знанию, добытому непривычным для них способом. Основываясь на собственном опыте, многие из них искренне полагают, что педагогические решения принимаются исключительно на основе интуиции, опыта, традиций, установившихся мнений и не в последнюю очередь здравого смысла. Мне представляется, что подобная позиция связана с непониманием того, что методика обучения математике строится как область гуманитарного прикладного знания.

Гуманитарный характер методики обучения математике связан с тем обстоятельством, что ее объектом является типично гуманитарный процесс освоения ребенком сложного математического знания. Человек в социуме является вообще одним из наиболее сложных объектов для исследования. Общепризнанно, что так называемые позитивные науки (математика, естествознание) не имеют адекватного аппарата описания и исследования этого феномена: человек плохо помещается в формальной схеме. Напротив, в гуманитарных областях были развиты соответствующие процедуры и наработана определенная методология, позволяющая исследовать социальные объекты и процессы и получать знание о них. Гуманитарный характер методики обучения математике порождает подходы к построению категорий этой дисциплины и к отбору адекватных методов и приемов исследования, нетипичные для самой математики.

Так, в отличие от математики, методика обучения математике оперирует с *нестрого определенными, «размытыми» понятиями*. В качестве примеров можно указать «развитие», «творчество», «понимание», «упражнение», «задача», «пространственное воображение» и т.д. Встречающиеся в литературе попытки построения «строгих» определений для понятий подобного рода, как правило, вызывают жалкое впечатление. Более естественным в гуманитарных дисциплинах является задание понятий через неформальное описание и/или примеры, ориентированные на контекст, в котором будут использоваться эти понятия.

Подобный подход вовсе не является слабостью методики обучения математике и должен применяться вполне сознательно. Дело в том, что использование нестрогих понятий позволяет оперировать с ними в плохо определенных «размытых» контекстах, типичных для гуманитарной сферы. С другой стороны, всякое уточнение их убивает, поскольку сокращает область возможного применения. Интересно, что аналогичные ситуации встречаются и в рамках самой что ни на есть классической математики: блестящей иллюстрацией сказанному является эволюция понятия «многогранник» в геометрии.

Методика обучения математике находится на стыке различных наук. Она изучает и описывает процесс обучения детей определенного возраста, и поэтому вынуждена использовать результаты и методы возрастной физиологии, общей и педагогической психологии и педагогики. Исследуемые процессы протекают в определенном социокультурном окружении, определяющем как общефилософские подходы к образованию в целом (парадигмы передачи социального опыта, целевые установки образования), так и реальные условия его осуществления (возможности общества и школы). Это требует подключения таких наук, как философия, культурология, социология и школоведение. Тем не менее, использование методов родственных наук не включает методику обучения математике в указанные научные области, подобно тому, как использование математического аппарата в физических расчетах не делает математику частью физики. Более того, методические положения не могут быть непосредственным следствием какой-либо одной из указанных дисциплин без учета влияния остальных и специфики математики как объекта изучения. Аналогичным образом общая дидактика несводима, например, к психологии, а методика обучения математике — к общей дидактике.

Логическое и эмпирическое в методике математики

Естественно, что утверждения, формулируемые с помощью «размытых» понятий, оказываются нестрогими. Это осложняет применение логических схем доказательств в рамках гуманитарных контекстов. Применение правильных фигур силлогизмов к «размытым» понятиям и утверждениям приводит к их дальнейшему «размыванию», а во многих случаях и к искажению смысла. Логические рассуждения в области дидактики математики напоминают строительство стенки из кирпичей с аморфными и плохо видимыми гранями. В соответствии с правилами логики мы ставим один кирпич на другой. На самом же деле из-за «размытости» граней кирпичи располагаются иногда со значительным смещением центров тяжести, и в результате стенка опрокидывается.

Поэтому в методике обучения математике на смену логическим схемам приходят *правдоподобные рассуждения*, столь хорошо описанные Д. Пойа. Соответственно чисто логические критерии дополняются другими критериями верификации утверждаемых положений.

Каждый из способов верификации гипотез, используемый в дидактике математики, не является доказательством в строго логическом смысле слова. На смену логическому доказательству обычно приходит последовательно выстроенная система правдоподобных умозаключений, приводящих к разумному обоснованию гипотезы или показывающих ее непротиворечивость по отношению к известным фактам. Разумеется, подобный способ верификации дает положительный ответ с некоторой (чаще всего неизвестной) долей достоверности, меньшей единицы. Поэтому важнейшим методологическим требованием становится требование *многообразия доказательств* высказанных гипотез.

Главным способом верификации гипотез обычно служит *педагогический эксперимент*, имеющий целью проверку соответствующей гипотезы или ее частей. Педагогический эксперимент как бы помещает теорию в практическое поле, в котором эффективно обнаруживаются как позитивные, так и негативные моменты теории. Особенно ценен для этого поисковый эксперимент, являющийся органической частью исследования. Качественный анализ результатов поискового эксперимента позволяет существенно уточнить предварительные гипотезы исследования и в ряде случаев выдвинуть новые гипотезы и сформулировать новые утверждения.

При проведении педагогического эксперимента и анализе его результатов мы должны принимать во внимание своеобразный педагогический «эффект Гейзенберга», аналогичный известному в квантовой механике: проведение эксперимента изменяет условия протекания педагогического процесса, что «смещает» полученные выводы. Кроме того, следует учитывать невозможность полного воспроизведения условий эксперимента во времени: нельзя повторить урок заново в том же классе.

Для борьбы с этими явлениями прибегают к рандомизации условий эксперимента (управляемому внесению флуктуаций), пытаясь таким образом «погасить» влияние экспериментальных условий. Этим же целям служит расширение масштабов эксперимента (в отечественной практике именуемое «опытным внедрением»), элиминирующее влияние фактора эксперимента.

В то же время ценность количественного анализа результатов эксперимента, на взгляд автора, значительно преувеличена. Изощренная техника современной математической статистики слишком часто применяется некорректно. Этому, в частности, способствует некритическое использование компьютерных программ статистической обработки данных, разработанных для использования в статистически однородных областях с известными законами распределения (например, для обработки результатов стрельб или технических измерений). Между тем в обучении математике статистическая однородность и нормальное распределение являются скорее исключением, чем правилом. Впрочем, автор вовсе не отвергает необходимость и полезность статистической обработки результатов педагогического эксперимента, но отводит ему роль лишь одного из способов доказательства.

Интересным приемом, не имеющим близкого аналога в классической и современной математике, является *дискуссия*. Здесь речь идет не о спонтанно возникшей, а о сознательно организованной дискуссии как элементе методологии гуманитарного знания. История дискуссий восходит к прогулкам Сократа и «Диалогам» Платона, минует впечатляющий период богословских споров средневековья, и в наше время продолжается в оживленных перепалках на страницах газет и журналов и с трибун конгрессов и конференций.

За столь долгий период накоплен большой опыт организации дискуссий и повышения их результативности. Укажем лишь некоторые применяемые для этого способы.

- Осознанное включение дискуссий в план проведения работ взамен стремления избежать обсуждения и достигнуть единомыслия под предлогом повышения эффективности работы.
- Явное указание позиций («я утверждаю следующие положения») и намерений («я намерен оспорить следующие положения») для обсуждения и критики.
- Анализ исходных предположений и «расшатывание» утверждаемых положений с целью поиска слабых мест работы.
- Поощрение доброжелательной и конструктивной критики. Оппонент не враг, но помощник обсуждаемого. Единомышленники часто не замечают «дырок» в своих выводах и рассуждениях. Пренебрегая дискуссией в ходе выполнения работы, они получают неожиданный провал по ее завершении (в отечественной практике ярким примером может послужить реформа New Math 1960—1970-х гг.).
- Анализ как положительных, так и отрицательных сторон и последствий предлагаемых решений. Как часто мы видим обсуждения, когда сторонники подхода *A* обсуждают достоинства *A* и недостатки *B*. В это же время сторонники подхода *B* обсуждают достоинства *B* и недостатки *A*.

Абсолютные положения гуманитарных теорий, как правило, задаются в негативной форме типа «не следует», т.е. имеют характер *принципов запрета*. Традиция эта восходит еще к этическим системам древности: достаточно указать на библейские заповеди «не убий», «не укради» и т.д. Впрочем, подобный подход характерен и для современных областей науки: сам термин, введенный В. Паули, заимствован из современной физики. Да и что такое, скажем, закон сохранения энергии, как не принцип запрета: этот закон ничего не говорит о том, как будет протекать физический процесс в замкнутой системе, но требует совпадения количества энергии в его начале и в конце, что запрещает процессы, не удовлетворяющие этому требованию.

В гуманитарной же сфере мы никогда достоверно не знаем, «как надо» — теории, претендующие на подобное знание, справедливо связывают с насилием и тоталитаризмом. Но в ряде важных случаев мы достоверно знаем, как «не надо», что и выражаем в виде соответствующего положения. Такое положение не всегда имеет внешнюю форму запрета: так, дидактический принцип, якобы в позитивной форме выражающий требование «обучение должно быть посильно детям», на самом деле запрещает использовать педагогические системы, этому не удовлетворяющие.

Принципы запрета находят значительную сферу своего применения в нормативной документации: учебных планах, программах, стандартах и т.п. Фактически все эти документы регулируют некоторые ограничения типа «выделять на математику не меньше указанного числа часов», «преподавать математику в объеме, не меньшем обозначенного в программе», «добиться достижения учащимися уровня математической подготовки не ниже заданного стандартом» и т.п.

Разумеется, методика обучения математике оперирует не только с принципами запрета, но и с утверждениями позитивного толка. Подобные утверждения всегда имеют характер более или менее правдоподобных *гипотез*, нуждающихся в соответствующих доказательствах.

О прикладном характере методики математики

Другой важный аспект методики обучения математике заключается в том, что это *прикладная дисциплина*, направленная на получение решений, пригодных для их реализации в практике обучения. Практика служит источником методической проблематики: ее потребности и противоречия оправдывают актуальность исследования соответствующих проблем и выдвижения исследовательских гипотез. Практика в форме констатирующего и поискового педагогического эксперимента является одним из главных инструментов исследования. Наконец, практика выступает в качестве основного критерия истинности полученного теоретического знания.

Прикладной характер методики обучения математике более всего проявляется в соответствующей методологии исследований, типичной для прикладных дисциплин. Отличия методологии прикладных дисциплин от теоретических прекрасно показывает известная шутка: «Теоретик делает то, что можно, так, как нужно. Прикладник делает то, что нужно, так, как можно». Она иллюстрирует очевидную *ориентацию методики обучения математике на получение практически приемлемого результата*. Планируемая востребованность результатов исследования практикой служит главным основанием для постановки и проведения исследования. Неслучайно в отечественном опыте присуждения ученых степеней в области методики обучения актуальность научной проблемы диссертации, как правило, объясняется ее возможностями внести вклад в ликвидацию недостатков или разрешение противоречий в практике. Тем самым позиция «искусства ради искусства», характерная для многих чисто теоретических работ, в методике обучения выглядит неестественной.

Практико-ориентированное исследование, отвечающее конкретной практической потребности, должно быть выполнено в определенные сроки. Его ограничивают также имеющиеся в распоряжении исследователя финансовые, материальные и кадровые ресурсы. Наконец, существенным ограничением является во многих случаях теоретическая неразработанность многих вопросов в дидактике и смежных дисциплинах. Все это вынуждает исследователя отступать от традиционной методологии «чистых» теоретических дисциплин, подключая эмпирические данные, правдоподобные соображения, а в некоторых случаях — интуитивный выбор.

Исследователи часто стыдятся этих моментов, тщательно их затушевывают в своих отчетах. Это происходит от непонимания специфики прикладной науки, которой нет никакой возможности ждать, когда будут теоретически решены все возникающие вопросы.

Так, школам нужны учебники и соответствующее учебно-методическое обеспечение. Они нужны к определенному сроку, на их создание выделяются определенные средства, в стране есть весьма ограниченное число людей, которые по своей профессиональной квалификации могут участвовать в реализации таких проектов и т.п. Нельзя рассчитывать на то, что теоретические проблемы, связанные с учебниками, будут решены в ближайшее время.

Тем не менее, проекты подготовки учебников могут иметь вполне исследовательский характер. Для этого в процессе их реализации должны применяться научно апробированные методы и процедуры, развитые в педагогической науке, а эмпирический элемент должен контролироваться.

Надо сказать, что подобные схемы характерны для всех прикладных дисциплин, включая прикладную математику. Ведь многие математические процессы, используемые при расчетах, скажем, полета ракет или конструкции ядерных реакторов, не имеют полного теоретического обоснования (например, соответствующих доказательств сходимости). Тем не менее, подобные расчеты производятся, ракеты летают, а ядерные реакторы вырабатывают энергию. Принципиальная возможность использования недоказанных утверждений и даже расходящихся процессов обусловлена тем обстоятельством, что на смену логической непротиворечивости — единственного критерия истинности в самой математике — приходит возможность экспериментальной проверки результата логических рассуждений.

Подобно этому и в методике обучения математике *экспериментальная проверка* (можно сказать шире — практика), включенная в ткань исследования в качестве его составляющей и контролирующей части, позволяет оперировать эмпирическими данными, правдоподобными рассуждениями, использовать интуицию и опыт исследователя.

Некоторые практические рекомендации

Многовековой опыт математического образования дает нам образцы, правила и приемы, которые оказываются полезными при проведении исследований и внедрении их результатов в практику. Упомянем лишь некоторые из них.

• *Разумный консерватизм* педагога, т.е. (по А. Линкольну) предпочтение, отдаваемое известному и апробированному перед новым и непроверенным. Окружающий нас океан незнания о педагогических (да и о социальных) процессах не позволяет с высокой степенью достоверности прогнозировать последствия решений, принимаемых из лучших соображений (вспомните, куда ведут благие намерения). Поэтому позиции исследователя, дающего свои рекомендации школе, приличествует осторожность с ее традиционным лозунгом «Не навреди!».

• Понимание *эволюционного характера школьных реформ* и недопустимости революций. Школьная система высоко инерционна. Она напоминает идущий по океану стотысячетонный танкер. Если рулевой резко повернет штурвал, курс танкера не изменится, а рулевое управление, скорее всего, придет в негодность. Изменить курс танкера можно только плавными и небольшими поворотами руля. Поэтому практика отвергает чрезмерно радикальные предложения исследователей.

• Желательность включения конкретного исследования в более *общую дидактическую концепцию*, что позволяет упростить процедуры верификации его результатов. Помимо этого, повышается вероятность практического использования результатов такого неизолированного исследования.

• Ориентация на поиск *устойчивых решений*, результат которых мало зависит от флуктуаций параметров (условий обучения, квалификации учителей и т.п.). Рекомендации исследователей, основанные на неустойчивых решениях, сложно и дорого внедрять в школу. Опыт также показывает, что дидактические решения, основанные на учете «тонких» эффектов и имеющие поэтому чрезмерно узкую область применимости, не «работают» по причине своей неустойчивости. В то же время более «грубые» рекомендации оказываются более эффективными.

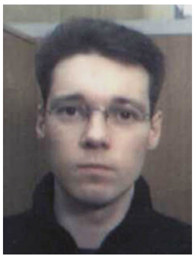
• *Соразмерность целей и средств* как при проведении исследований, так и при внедрении его результатов. Для измерения размеров при изготовлении молотка не следует пользоваться микрометром. Неправильно также избирать цели, для достижения которых не подходят наличествующие средства. Вообще, распространенное убеждение в том, что цели определяют средства, опасно: в социальных областях оно приводит к выбору неадекватных средств и к появлению неустойчивых решений. Сущность противоположного, *«ресурсного» подхода* иллюстрируется высказыванием: «Скажи мне, какие у тебя есть средства, и я скажу тебе, какие цели ты сможешь поставить».

• Использование *итеративного подхода* при планировании и проведении исследования. Опыт подсказывает, что заранее не всегда удается правильно определить все действия, необходимые для проведения исследования, особенно при реализации больших проектов. Часть выполненных действий оказывается ненужной, что выясняется лишь на последующих этапах работы. Поэтому не следует «отлизывать» ее части по отдельности. Разумнее попытаться сначала выполнить проект в целом, получив первое грубое приближение решения проблемы; затем произвести критический анализ полученного решения и на его основе осуществить уточняющую итерацию, и так далее.

◀ **Вернуться к содержанию**

Дискуссия

Новые педагогические культы и будущее школьной математики



БУСЕВ Василий Михайлович
редактор газеты «Математика»,
редактор издательства «Просвещение»
vbusev@yandex.ru

Введение

В последние десятилетия в педагогической науке и отчасти практике наблюдается ощутимый бум словотворчества, свидетельствующий о том, что в умах ученых, методистов и учителей происходят некие брожения. Наряду с уже привычными дифференциацией и гуманизацией можно читать и слышать: «компетентностный подход», «продуктивное обучение», «метод проектов», «сотрудничество в обучении», «свободное воспитание»... Эти новые слова вызывают неоднозначную реакцию в педагогическом сообществе. Автору настоящей статьи довелось наблюдать на одной конференции бурную дискуссию, возникшую при обсуждении доклада, в котором использовался термин «компетенция». В прениях прозвучала даже такая мысль: новые слова придумывает «педагогическая шушера», чтобы морочить всем остальным голову. С этой оценкой можно соглашаться, можно не соглашаться, но в любом случае было бы неверно отказываться от обсуждения очевидно существующей проблемы.

Слова не возникают просто так, за ними всегда стоит некая программа действий. Эти новые слова и, соответственно, новые подходы в образовании предлагается всем нам, педагогам или управленцам, претворять в жизнь. И не только «в принципе» — на уровне управления школой или вузом, но и в преподавании отдельных предметов, в частности, математики. Можно, конечно, махнуть рукой на предлагаемые новшества и работать по-старому, но имеется несколько причин, по которым стоит потратить время на знакомство и осмысление современных педагогических течений. Во-первых, о некоторых новшествах речь идет в «Концепции модернизации российского образования на период до 2010 года», т.е. дело в данном случае не ограничивается частной инициативой отдельных педагогов-энтузиастов, а имеет государственную поддержку. Во-вторых, предложения по активному внедрению «нового» в последние несколько лет звучат особенно громко: чуть ли не каждый региональный сборник или журнал содержит хотя бы одну статью, призывающую к реформированию образования в рамках какой-либо концепции. Наконец, в-третьих, любые призывы к реформированию чего бы то ни было всегда настораживают.

По этим причинам ниже мы расскажем о некоторых современных педагогических течениях и посмотрим, как они преломляются при изучении математики. Речь пойдет о трех направлениях: «проектная деятельность», «продуктивное обучение» и «компетентностный подход в образовании», поскольку они являются, с одной стороны, наиболее пропагандируемыми сегодня, а с другой стороны, — наиболее опасными как для преподавания математики, так и для всей системы образования в целом.

Что такое метод проектов?

Метод проектов возник на рубеже XIX–XX вв. в американской педагогике. Считается, что он берет начало в трудах Джона Дьюи, хотя сам Дьюи слова «проект» не употреблял. Однако он высказал основную идею, от которой до метода проектов оставался лишь шаг. Итак, по Дьюи, вести обучение следует через целесообразную деятельность ученика с учетом его личных интересов и целей. Для того чтобы ученик воспринимал знания как действительно нужные, ему необходимо поставить перед собой и решить значимую для него проблему, взятую из жизни. При этом для решения поставленной проблемы ученику придется применять знания (в том числе и новые, которыми он еще не обладает) и получить в итоге реальный, ощутимый результат. Согласно идеям Дьюи, школьное обучение должно быть практико-ориентированным, а школа должна быть связана с жизнью.

В начале XX вв. американский профессор Коллингс работал в своей школе по методу проектов и предложил первую в мире классификацию учебных проектов. В это же время идеи метода проектов проникли и в Россию: под руководством русского педагога С.Т. Шацкого в 1905 г. была организована небольшая группа учителей, пытавшихся активно использовать этот метод в практике преподавания. Однако существенное развитие в отечественной школе метод проектов получил лишь в 1920-е гг., когда система образования находилась в поисках путей своего развития. В начале 1930-х гг. метод проектов (и не только он) был подвергнут резкой критике со стороны ЦК ВКП(б). Постановление от 5 сентября 1931 г. «О начальной и средней школе» осудило чрезмерное увлечение новыми методами обучения, предложив «развернуть решительную борьбу против легкомысленного методического прожектерства, насаждения в массовом масштабе методов, предварительно на практике не проверенных». В постановлении отмечалось, что коренной недостаток школы заключается в том, что она не дает достаточного объема общеобразовательных умений и навыков, необходимых для продолжения обучения в техникумах и высшей школе. Это постановление (и ряд других, принятых чуть позднее) положило конец широким экспериментам в педагогике. Со временем была утверждена структура школы, которая не сильно отличалась от структуры дореволюционной гимназии: та же школьная форма, те же отметки, те же уроки... Современные апологеты метода проектов видят причину неудачи педагогических новаций 1920-х гг. в непродуманности нововведений: отсутствие подготовленных кадров, слабая методическая разработка проектной деятельности, вытеснение методом проектов обычных уроков. Последняя причина представляется наиболее важной; опыт молодой советской школы показал, что работа по методу проектов не дает глубоких знаний, которые служат фундаментом для дальнейшего обучения.

Так что же такое метод проектов? Лучше всего это можно понять, если просто описать работу над проектом. Проект начинается с постановки лично и социально значимой проблемы, взятой из окружающего мира. Вот несколько тем проектов: «Атлантида: миф или реальность?», «Два разных мира — девочки и мальчики», «Конституция России и конституция США», «Наш собственный учебник русского языка», «Новые технологии градостроения». В общих чертах смысл каждого из проектов понятен из названия: в проекте формулируются (исследуются, обсуждаются, доказываются) некоторые положения, связанные с выбранной темой. При этом учащиеся используют сведения из разных областей знания: история, психология и физиология, право, методика преподавания русского языка, архитектура.

Итак, тема выбрана. Теперь необходимо определить *гипотезу исследования* или хотя бы его цель. Например, в проекте об Атлантиде ясно просматривается цель: выяснить, существовала ли Атлантида. В проекте об учебнике русского языка обоснование выбора темы может звучать примерно так: «Мы сами учимся русскому языку, и поэтому со стороны ученика нам видно, как надо учить. Мы разработали систему упражнений, позволяющих научиться тому-то и тому-то, и считаем, что эта работа будет востребована нашими сверстниками».

После выбора темы и определения цели и гипотезы исследования нужно определить, какие материалы и в каком порядке необходимо собрать. Затем идет поиск информации, которая осмысливается и упорядочивается. Результат этого этапа проекта называется *продуктом*. В качестве продукта могут выступать web-сайт, видеофильм, выставка, газета или журнал, законопроект, костюм, модель, оформление кабинета, учебное пособие и т.п. Но продукт — это еще не окончательный результат. Последний этап работы над проектом — его *презентация*, т.е. наглядное представление результатов работы жюри, которое оценивает проект. Презентация может быть оформлена в виде доклада, отчета, компьютерной программы, пресс-конференции, спектакля, экскурсии.

Жюри, оценивающее проект, должно состоять из людей, которые что-то понимают в теме проекта и могут компетентно выслушать и задать вопросы. Критерии оценки обычно предлагаются следующие:

- самостоятельность работы над проектом;
- актуальность и значимость темы;
- полнота раскрытия темы;
- оригинальность решения проблемы;
- артистизм и выразительность выступления;
- ответы на вопросы.

Для полноты картины к сказанному необходимо добавить, что проекты могут быть классифицированы по времени их проведения (мини-проекты, краткосрочные, недельные, долгосрочные), по численности участников проекта (индивидуальные, групповые) и по комплексности: монопроекты (в рамках одного предмета) и межпредметные проекты.

Нетрудно заметить, что при проектной деятельности существенно меняется роль учителя: из специалиста-предметника он превращается в консультанта, руководителя, координатора, эксперта.

Проекты «по математике»: конкретные примеры

Теперь настало самое время, чтобы ознакомиться с примерами проектов, более или менее связанных с математикой, в оценке которых автору настоящей статьи довелось принимать участие. В Москве каждый год проводится конкурс учебно-исследовательских и проектных работ «Ярмарка идей на Юго-Западе». Идея этого конкурса была привезена директором одной из частных московских школ из Калифорнии (США). Впервые конкурс прошел в 2003 г. на базе Московского городского Дворца детского (юношеского) творчества. С тех пор количество участников возросло в несколько раз, и в 2007 г. конкурс проходил также в здании Академии наук и здании Российского университета дружбы народов[1].

В залах названных зданий на столах дети размещают презентации своих проектов — постеры, вертикально стоящие картонные листы, на которые наклеены и навешены материалы проекта. Эксперты — преподаватели, методисты и т.д. — ходят и оценивают проекты, занося результаты в таблицу, которая затем сдается организаторам. При этом эксперт обязан оценить проекты из своей предметной области, хотя может затем оценить и проекты из других предметных областей.

Вот список наиболее типичных работ, которые были представлены на конкурсе в 2004 и 2007 гг.

I

Симметрия в науках и архитектуре.
Удивительная симметрия.
Золотое сечение в поэзии и архитектуре.
Оптические иллюзии.
Математика, музыка, компьютер.

II

Интегрированный проект по предметам информатике и математике на тему: «Изучение теоремы Пифагора».
Чудо-задачник.
Построй сечение сам!
Арифметическая прогрессия.
Система координат. Построение графиков функций.
Проценты в нашей жизни.

[1] Подробнее о конкурсе см. на сайте: http://idea.mosuzedu.ru.

III Часы — приборы времени.
Русские старинные меры.
Системы счисления.

IV Нахождение алгоритма для проведения непрерывной линии по системе пересекающихся окружностей.
Подобные функции и их основные свойства.

Все приведенные проекты разбиты на 4 группы. Группа первая — *проекты ни о чем*. Всем нам это хорошо знакомо: поиск золотого сечения во всех мыслимых и немыслимых отношениях окружающего мира (от здания МГУ им. М.В. Ломоносова до стихов Лермонтова), восхищение симметрией всего сущего, компьютерная презентация с большим количеством оптических иллюзий, поиски математической гармонии в электронной музыке... Возникает естественный вопрос: а где здесь математика? Конечно, детям этот вопрос не задашь, это вопрос к самому себе (и к учителям этих детей). Но зато учащихся можно спросить что-нибудь из математики. Например, что такое симметрия и какая она бывает, что такое золотое сечение и числа Фибоначчи? Общение с авторами проектов показало, что ни на один из этих вопросов они ответить не могут. Но при этом бойко рассказывают о том, где встречается то же золотое сечение.

Группа вторая — *проекты по методике преподавания математики*. Их лейтмотив: «Мы научились тому-то и теперь хотим помочь научиться другим». С этой целью авторы проектов создают презентации (теорема Пифагора, построение сечений), web-сайты (арифметическая прогрессия), бумажные задачники («чудо-задачник»). Казалось бы, авторы проектов этой группы должны владеть материалом на высоком уровне — ведь чтобы учить других, надо самому очень хорошо разбираться. Но и здесь нас постигнет неудача: участники проекта об арифметической прогрессии не могут назвать формул, не знают, как найти сумму натуральных чисел от 1 до n без применения формул (легендарный способ Гаусса). Авторы проекта о теореме Пифагора знают о «пифагоровых штанах», но не знают, верна ли теорема, если на сторонах треугольника строить не квадраты, а другие фигуры. Впрочем, это можно счесть придиркой: в школе этот материал не изучается, а самостоятельно поставить такую задачу может далеко не каждый. Но вот вполне безобидный вопрос о том, какие многоугольники могут получаться в сечении куба, поставил в тупик авторов проекта «Построй сечение сам!» Поначалу один из них утверждал, что даже треугольник получиться не может. Почему в сечении не может быть семиугольника, дети так и не догадались.

В третьей группе собраны немногочисленные *проекты по истории математики* (хотя историю часов можно отнести к истории математики с некоторой натяжкой). Эти проекты оформлены красочно, а дети рассказывают много интересного, и видно, что они добросовестно собрали и обработали большой материал. Но с осмыслением полученных результатов тоже проблемы. Авторы проекта о системах счисления не смогли ответить на вопрос, почему сейчас общепринята десятичная система счисления; на похожий вопрос — почему в 1918 г. в нашей стране перешли к метрическим мерам? — не смогли ответить авторы проекта об истории мер. Аналогично обстояло дело и с вопросом о часах: откуда пошла традиция делить час на 60 минут и минуту на 60 секунд?

В последней группе представлены два *исследования школьников*. В работе «Нахождение алгоритма для проведения непрерывной линии по системе пересекающихся окружностей» шестиклассница Светлана Мануйлова поставила и решила задачу о том, можно ли обвести карандашом систему пересекающихся окружностей по их дугам, не проходя по одной и той же дуге более одного раза и не отрывая карандаша от бумаги. Задача появилась в связи с задачей Леонарда Эйлера о кенигсбергских мостах. Автор показала, что обход всегда возможен, и разработала алгоритм такого обхода.

В работе «Подобные функции и их основные свойства» десятиклассник Дмитрий Пивкин ввел понятие подобных функций и исследовал некоторые их свойства. Гипотеза исследования состояла в том, что подобные функции можно применять для решения уравнений и неравенств (насколько можно было понять, пока гипотеза не подтвердилась, но исследования продолжаются).

Метод проектов и школьная математика

Зная общую теорию метода проектов и познакомившись с конкретными проектами «по математике», можно теперь обсудить соотношение школьной математики и проектной деятельности. Первое, что бросается в глаза при рассмотрении всех перечисленных выше проектов «по математике», — это практически полное отсутствие математики в большинстве из них. Действительно, что мы понимаем под математикой, если говорить о ее педагогическом значении? Поскольку «математика ум в порядок приводит», то очевидно, что математика связана с некоторой деятельностью, которая способствует приведению ума «в порядок». Вспомнив теперь, что школьная математика состоит в основном из примеров, задач и теорем, т.е. в конечном счете так или иначе сформулированных задач, можно сказать, что *школьная математика предполагает специально организованную деятельность по решению задач*. Несколько заостряя этот тезис, можно сказать так: если дети решают задачи, то математика есть; если не решают, то математики нет. Правда, тут еще очень важно, *какие* задачи они решают и *как* решают. В любом случае должно быть ясно: *если дети не решают задач, то математики нет*. Именно по этой причине в проектах, отнесенных к группам I–III, математики нет. Здесь есть лишь видимость математики, есть некоторая деятельность, связанная с математикой косвенно.

Принципиальную несовместимость метода проектов и школьной математики можно проследить и далее. Эта несовместимость проявляется уже на стадии постановки проблемы: в проекте проблема должна быть взята из окружающего мира, школьные задачи берутся вовсе не из жизни. Они либо не связаны с окружающим миром даже внешне («решите иррациональное уравнение»), либо являются псевдопрактическими (задачи на бассейны). При этом важно подчеркнуть, что искусственность формулировки вовсе не обесценивает задачу, ведь значение имеет внутреннее содержание задачи, те умственные действия, которые придется совершить решающему, чтобы прийти к ответу.

В школьной математике и при проектной деятельности работа над решением проблемы происходит по-разному: для решения математической задачи требуются специальные умственные действия, подготовка проекта «по математике» предполагает сбор и систематизацию некоторой информации. Наконец, презентация результатов различна: если школьник решил сложную задачу, то в принципе нет большой разницы, как он оформит результат: в виде презентации, доклада или просто нацарапает решение на листе в клетку. Важно, что он решил задачу. При оценке проекта все наоборот: здесь как раз важны актуальность проблемы (для кого?) и оформление результатов («артистизм и выразительность выступления»)[2].

Таким образом, *школьная математика и метод проектов — две совершенно различные вещи*. Тем не менее, мы видим здесь некоторое смешение понятий: проектами по математике почему-то называются проекты по ее методике и истории, а также исследования, вовсе проектами не являющиеся (если понимать проект так, как сказано в начале статьи). Учитывая это, можно сказать, что проектов по математике не существует совсем. Впрочем, если постараться, то словосочетанию «проект по математике» можно придать некий смысл. Вспомним, что в качестве исходной посылки в проекте должна выступать некоторая проблема, взятая из жизни, а результатом должен быть «продукт», который можно где-то применить и использовать. Если говорить о математике, то эта схема чем-то напоминает математическое моделирование. В таком смысле вполне можно говорить о «проекте по математике»: взять какую-то, скажем, физическую задачу, перевести ее на язык математики, решить и интерпретировать полученный результат[3].

Увлечение методом проектов можно рассматривать как временное явление, как забаву — дань педагогической моде. Однако в этом увлечении таятся некоторые серьезные опасности. Первая и самая очевидная — замена содержательной школьной математики некоторой деятельностью, с математикой мало связанной. В пользу этого аргумента говорит, в частности, беспомощность школьников перед несложными математическими вопросами по их проектам (см. выше). К тому же ясно, что проект отнимает много времени, а количество часов в году ограничено. Стало быть, или мы решаем задачи, или работаем по методу проектов. Можно возразить, что метод проектов должен лишь дополнять, а не заменять собой традиционную систему обучения математике. С этим можно согласиться. Но опыт показывает, что в некоторых московских школах уже разрешено сдавать экзамен по выбору в виде проекта. Автору настоящей статьи довелось ознакомиться с презентацией «Из истории тригонометрии», подготовленной группой школьников и засчитанной в качестве ответа на устном экзамене по геометрии. Нетрудно видеть, что здесь произошла подмена: вместо уровня математического развития ученика проверяется его умение найти материал и красиво его оформить. Почему тогда экзамен называется «геометрия»?

---

[2] Характерно, что упомянутая выше участница конкурса Светлана Мануйлова получила лишь диплом III степени.

[3] Заметим, что на «Ярмарке идей» в 2007 г. был представлен проект «Математическая модель определения спелости арбуза», вполне соответствующий представлениям о математическом моделировании.

Продуктивное обучение: школы без стен, крыши и фундамента

Метод проектов обычно рассматривается его приверженцами не как альтернатива классно-урочной системе, а как довесок к традиционному обучению, позволяющий частично снять неизбежные противоречия, которые ему сопутствуют. Продуктивное же обучение — это совершенно иная философия образования. Наиболее ярые сторонники этой философии Н.Б. Крылова и О.М. Леонтьева в своей книге [4] характеризуют продуктивное обучение так:

> «В продуктивном обучении основная ориентация всей педагогической деятельности — не развитие сферы знаний учащегося, а *получение учебного и предметного продукта в самостоятельной деятельности*».

Однако, отмечают они, задачи продуктивного обучения не исключают значение знаний. Просто глобальная цель (учиться вообще) превращена во вспомогательную, приоритет отдан опыту, базирующемуся на непосредственном практическом интересе подростка.

Отказ от доминанты знаний и от взгляда на учителя как на человека, обладающего знаниями и опытом, влечет за собой много важных следствий. Так, учебный процесс перестает быть процессом передачи знаний и опыта. Учащиеся продуктивных школ не «проходят» программу, а стараются хорошо выполнить выбранную ими работу. Поскольку нет обязательной для всех программы, то отпадает необходимость в выставлении отметок. Учащиеся сами участвуют в оценивании своей деятельности (впрочем, неясно, как это происходит). В продуктивных школах нет классов в привычном понимании этого слова. Учащиеся работают в учебных и производственных мастерских и свободно общаются друг с другом. При этом продуктивное обучение не является формой профессиональной ориентации, хотя не исключено, что в процессе своей деятельности ученик сможет определиться с выбором будущей профессии.

Но все же — что такое продукт и продуктивное обучение? Авторы книги приводят много примеров, показывают, что можно назвать продуктом, а что — нет, но определения так и не дают. По всей видимости, достаточно близким к действительности будет такое определение: продуктивное обучение — это такая лично значимая для ученика деятельность (в самом широком смысле), в результате которой возникает нечто. «Нечто» — это все что угодно: написанная картина, придуманная мелодия, собранная коллекция бабочек или марок, галерея фотографий, компьютерная программа, поставленный спектакль, реферат или исследование на выбранную тему... Важно только, что деятельность и ее результат — «продукт» — не навязаны ученику педагогом, а возникли исключительно по его воле.

В целях «разбавления» сухой теории приведем конкретную историю школьника Мики, изложенную в цитированной выше книге. Директор школы, где Мики учился уже в последнем классе, посоветовал ему уйти из школы (причины совета не приводятся). Мики несколько лет занимался случайными подработками, пока не оказался в продуктивной школе — он выбрал ее вместо предложенной ему однажды профессии каменщика. Первое, чем занялся Мики, была фотография. Он взялся написать тексты о фотографических процессах так, чтобы суть была ясна другим учащимся.

Вскоре выяснилось, что он подзабыл навык письма, и поэтому потребовалась помощь педагогов. Затем оказалось, что у Мики открылись интересы в кулинарии, и он поступил на работу в ресторан, где быстро подружился с шеф-поваром. Здесь он решил написать книгу «Южно-американская кулинария», для чего понадобилось собрать информацию о продуктах и их производстве. После нескольких перерывов в работе Мики удалось создать сборник из нескольких десятков рецептов, который после надлежащей редакторской правки шеф-повара был издан тиражом 50 экземпляров.

Процитируем мнение Н.Б. Крыловой и О.М. Леонтьевой об этой истории.

> «Согласитесь — это не просто образовательная история (case-story), это — живая педагогика, а не та "занаученная", которая встает порой со страниц традиционных учебников для студентов педвузов, где перечислены дидактические приемы и абстрактные рекомендации».

Действительно, это не та педагогика, к которой мы привыкли и которая имеет за плечами не одну тысячу лет истории, это что-то совсем другое. Но об этом мы поговорим чуть позже, в конце статьи.

Пока же постараемся представить себе Мики. Вряд ли нам это полностью удастся, ибо информации о нем в книге для этой цели приведено явно недостаточно. Очевидно одно: ребенок по каким-то причинам выпал из норм обычной школы. Проучившись в ней почти полный курс, он так и не смог наладить отношения с учителями и сверстниками. Прошло всего несколько лет, и он частично утратил навык письма (!). Одинокая, необразованная душа, он болтался по разным работам, пока не попал в место, где к нему проявили интерес. Здесь его не стали мучить арифметикой и правописанием, а пустили в свободное плавание, и он занялся любимым делом — фотографией и кулинарией. Теперь Мики интересно. Помимо интереса он даже получил ряд полезных навыков (в частности, научился писать). Но вот стал ли он образованным? И станет ли? Он узнал многие секреты приготовления пищи, но, по всей видимости, не знает истории своей страны. Он радуется своим успехам в фотографии, но вряд ли переживает вместе с героями художественной литературы. Он наверняка научился складывать в столбик, но, вероятно, не сможет решить логическую задачу. Астрономия, биология, история, физика, химия, математика, литература — все это либо усвоено фрагментарно, либо вовсе выпало из кругозора Мики. Он стал в чем-то компетентным, но остался необразованным, и потому вызывает только чувство жалости. Мозаичное сознание бессильно перед постоянно меняющимся миром. Счастливая участь Микки — всего лишь иллюзия. Нельзя быть счастливым, не понимая, кто ты, откуда пришел и куда идешь. Вне знаниевой парадигмы ответить на эти вопросы невозможно.

Подтверждение своей догадке о явных отклонениях учащихся продуктивных школ мы находим в коллективной монографии «Теория и практика продуктивного обучения». Автор первой статьи [1] М.И. Башмаков кратко рассказывает об истории продуктивного обучения. В начале 1970-х гг. в Нью-Йорке был организован проект «Город-как-школа» («City-as-school»), участниками которого стали молодые люди 16–18 лет, разочаровавшиеся в обычной школьной жизни. Основное время они проводили на стажировках, где учились в «ситуациях реальной жизни».

О составе учащихся продуктивных школ М.И. Башмаков пишет следующее:

> «В социальном плане учащиеся CAS представляют различные обездоленные слои общества, однако с развитием проекта и ростом авторитета CAS в нее стали поступать подростки из самых разных слоев, хотя по-прежнему большинство из них "трудные" или "с проблемами"».

Впрочем, автор полагает, что потребность индивида в продуктивном обучении скорее связана с типом сложившейся психики, чем с его социальным статусом. Как бы там ни было, но продуктивное обучение всегда было и остается формой обучения для небольшой группы детей, по каким-либо причинам (социального или психологического свойства) не могущим приспособиться к обычной школе. Таким образом, это обучение можно рассматривать в некотором смысле как коррекционно-развивающее. Здесь возникает естественный вопрос: зачем нормальному ребенку навязывать такое коррекционно-развивающее обучение, как это предлагают делать сторонники продуктивного обучения?

Homo competentus

Идейно близко к продуктивному обучению стоит компетентностный подход в образовании. Прежде чем говорить о сути предлагаемого новшества, предоставим слово авторам пособия [3].

> «Неэффективность [системы образования. — *В.Б.*] проявляется в том, что *не видно результата, значимого вне самой системы образования*. Мы десять лет учим русскому языку и не можем научить даже правописанию (которому все десять лет и учим), не говоря уже о других вещах, например, иностранном языке. Мы столько же лет учим математике, а продавец, отнимая от ста рублей двадцать, пользуется калькулятором. *Образование замкнулось само на себя*, наплодило множество искусственных форм, не существующих нигде, кроме самой сферы образования...»

Мы не станем сейчас отвечать авторам пособия, поскольку в каком-то смысле вся эта статья является ответом на данную цитату. Сейчас нам достаточно того, что они обозначили проблему — образование, по их мнению, оторвано от жизни. Но если отбросить «искусственные формы», которые нигде, по утверждению авторов, в жизни не нужны, то чему же учить? Они предлагают формировать компетенции. Под компетенцией в пособии понимается совокупность взаимосвязанных качеств личности (знаний, умений, навыков, способов деятельности), задаваемых по отношению к определенному кругу предметов и процессов и необходимых для качественной продуктивной деятельности по отношению к ним. Что такое «определенный круг предметов и процессов, необходимых для качественной продуктивной деятельности», авторы не поясняют. Их позиция становится более понятной, если процитировать принятое в пособии определение комептентностного подхода.

> «Компетентностный подход — это подход, акцентирующий внимание на результате образования, причем в качестве результата рассматривается не сумма усвоенной информации, а способность человека действовать в различных проблемных ситуациях».

Думается, в этой связи будет уместен такой пример. Если ученик знает основы электротехники, то это — знание; если может решить задачу на расчет цепи, то это

— умение; если в состоянии починить розетку, то это — компетенция. Таким образом, понятие компетенции шире схемы «знания–умения–навыки», оно не сводится к ним, хотя иногда включает их (когда действие невозможно без предварительного знания).

Поскольку деятельность человека в мире крайне разнообразна, то компетенций можно насчитать великое множество. Чтобы не запутаться, их делят на четыре группы:

- ключевые компетенции;
- обобщенные предметные умения;
- прикладные предметные умения;
- жизненные навыки.

Ключевые компетенции — это набор надпредметных умений, таких, как умение читать и понимать текст, обработка информации вообще, способность работать в группе.

Обобщенные предметные умения наиболее близки к традиционной школе (сами авторы признаются, что здесь им многое непонятно). В качестве примеров приводятся: умение решать классы задач, умение оценивать произведение изобразительного искусства, понимание иностранной речи, чтение графиков и диаграмм. Авторы указывают, что поиск таких обобщенных предметных умений — дело сложное и пока не решенное.

Говоря о *прикладных предметных умениях*, авторы пишут, что обучение должно носить деятельностный характер: «Можно требовать от школьников знания формул, а можно — умения решать задачи с применением этих формул. Ревизия нашего содержания образования с этой позиции была бы очень полезна». Критическое отношение к существующему всегда полезно, ибо при правильном подходе дает толчок к развитию, но что нового сказали нам авторы пособия? Каким это таким формулам в физике или математике мы учим «просто так», не уча одновременно решать задачи на применение этих формул?

Авторы полагают, что содержание прикладной линии школьного образования должно быть адекватно современной жизни.

> «Дело в том, что ряд умений и знаний, осваиваемых в школе, уже не принадлежит никакому профессиональному занятию... Примерами таких экзотических "школьных видов работы" могут быть использование логарифмической линейки или целый предмет "Черчение". Туда же надо в значительной степени отнести и так называемое производственное обучение, на котором девочки изучают, как шить юбку, а мальчики — работу на станках, оставшихся только в школах и ПТУ».

Тут авторы очевидным образом противоречат сами себе: утверждая приоритет способов деятельности над знанием, они отвергают обучение элементарным бытовым навыкам. Что же это за женщина, которая не может починить одежду, и что за мужчина, который не умеет забить гвоздь? Заметим, между прочим, что трудовое обучение (шитье, разметка и вытачивание деталей и т.п.) имеет большой развивающий потенциал, поскольку ручной труд тесно связан с развитием ума. К тому же труд позволяет реализовать межпредметные связи. Поэтому печально видеть, как трудовое обучение умирает в школах. Весьма полезно и черчение, которое развивает пространственное мышление, чего трудно добиться в условиях традиционного деления геометрии на планиметрию и стереометрию. Наконец, ошибочно утверждать, что черчение, шитье юбки или работа на токарном станке «уже не принадлежат никакому профессиональному занятию»: юбки шьют в ателье, токари работают на заводах, и чертят инженеры. По поводу изучения логарифмической линейки заметим, что здесь авторы проявляют полную неосведомленность о содержании школьного курса математики, логарифмическая линейка давно уже исключена из программы.

Под *жизненными навыками* подразумеваются: умение считать деньги, писать простые документы, занятия по подготовке к чрезвычайным ситуациям, воспитание грамотных потребителей, элементарная компьютерная грамотность и др. Автору настоящей статьи не хватает фантазии на то, чтобы представить, как будут проходить занятия по выработке умений считать деньги или воспитанию «грамотного» потребителя...

Вообще в цитируемой книге много утверждений не только спорных (в силу своей односторонности), но и противоречащих как здравому смыслу, так и изначальной установке самих авторов. Говоря о принципе научности в традиционном обучении, авторы пишут: «Наука теперь — это не истина, а версия, множественность и параллельность разных систем объяснения мира». Что здесь имеется в виду? Какая наука — всякая или только естественная? Как быть, например, с математикой, она «версия» чего?

Продолжая сравнение традиционного обучения (ТО) и компетентностно-ориентированного обучения (КОО), авторы дают такую характеристику: «Обучение в ТО — это процесс передачи знаний, умений и навыков, социального опыта от старших поколений — подрастающему. Обучение в КОО — это процесс приобретения опыта решения значимых практико-ориентированных проблем» (сравните с методом проектов и продуктивным обучением). Остается неясным, противопоставляется ли второе первому? Если да, то возникает вопрос: авторы действительно полагают, что передача социального опыта от учителей детям не требуется?

В результате сравнения учебного и предметного действия авторы приходят к выводу: «Собственно учебное действие по самой своей сути не может быть условием формирования способности к решению проблем. Этой задаче отвечает практическое действие». Под учебным действием здесь понимается взаимодействие школьника со всевозможными «муляжами» (термин авторов пособия): написание текстов, решение математических задач и др. По мнению авторов, работа с такими «муляжами» не предполагает ответственности со стороны ученика: ну, ошибся в написании слова или получил «полтора землекопа», на жизнь-то это никак не влияет, результат ошибки нельзя сразу увидеть. В качестве же предметного действия может выступать всякого рода экспериментирование, причем оно может быть как материальным, так и мысленным. Но как это противоречит проблеме «полутора землекопов»? Конечно, в жизни полтора землекопа не встретятся, но следует ли отсюда, что вполне нормальный школьник останется безответственным к такому результату? Ведь в данном случае ошибка налицо, ее сложно пропустить. Что касается русского языка, то в нем имеются правила, которые позволяют проверять правильность написания слов и расстановки знаков препинания. Таким образом, дело сводится не к проблеме получения реального, осязаемого результата, а к организации должной проверки своего ответа и решения. Именно для этого составляются обратные задачи, корни уравнения подставляются в исходное уравнение, а безударные гласные проверяются ударением.

Но дело не только в этом. Авторы искусственно противопоставляют «учебное» и «практическое» действия, отдавая явный приоритет второму. Очевидно, что практическое действие не может возникнуть просто так, без какой-то подготовки, без тренировки на тех самых «муляжах». Нельзя, например, сделать скворечник, не зная, как обращаться с древесиной, пилой, рубанком, не зная простейших элементов геометрии. Логично сначала освоить немного геометрии и научиться пользоваться инструментом, а уже потом что-то мастерить. Но что есть изучение геометрии и несложная работа с инструментом, как не работа с «муляжами»? Решение «искусственных» задач, «бессмысленное» выпиливание и строгание «никому не нужных» деталей — без этого никак не обойтись. Таким образом, практическое действие тесно связано с учебным. Учебное действие обязательно предшествует практическому. «Семь раз отмерь, один раз отрежь» — гласит народная мудрость.

Остановимся еще на одном месте, касающемся проблемы оценки знаний при компетентностном подходе. Достаточно очевидно, что при описанной выше ориентации на формирование компетенций система оценивания должна измениться. Но кто должен оценивать и, главное, что нужно оценивать? Умение читать текст или умение считать деньги, или то и другое? Вот мнение авторов: «Оцениваться должно умение ученика решать проблемы, которые ставит перед ним школьная жизнь». И далее: «Производимые продукты (в том числе и интеллектуальные) выполняются не только для учителя, а для того, чтобы конкурировать и получить оценку на внутреннем (школьном) и внешнем (общественном) рынке». О чем это? Какие конкретно проблемы ставит перед школьниками их жизнь? Как оценивать решение этих проблем? И зачем? Что такое «производимые продукты», что такое «школьный» и «общественный» рынки? Зачем этим «рынкам» что-то оценивать? И с какой стати школьники должны конкурировать между собой?

Продукты, компетенции и школьная математика

Продуктивное обучение, понимаемое так, как это изложено в книге [4], ставит на математике крест. Хотя бы потому, что в школе не будет предметов, а дети будут получать образование, работая в городских мастерских («ресурсная сеть») каждый по своим интересам. Возможно, единицы любознательных детей, с которыми с детства занимаются родители, выберут какую-то деятельность, связанную с математикой, но все остальные лишатся математического образования. Конечно, они научатся арифметике в объеме натуральных чисел и чуть-чуть дробей (в основном десятичных), кто-то даже осилит начала геометрии, но никакой теории при этом не будет: определения, доказательства, решение задач (и соответствующее развитие ума) — все это останется за бортом. Заметим, что это касается не только математики, но и вообще практически всех предметов: физики, химии, биологии, географии, истории, литературы и, конечно, астрономии (без нее обходился даже такой великий человек, как Шерлок Холмс).

Если стоять на менее радикальных позициях, как это делает М.И. Башмаков, то есть шансы в общих чертах сохранить систематическое изучение отдельных дисциплин. Вот как он понимает продуктивное обучение:

> «Продуктивное обучение — это личностно ориентированная педагогическая система, обеспечивающая получение образования на основе создаваемой сети образовательных маршрутов, представляющих собой последовательность учебных и производственных модулей, самостоятельно выбираемых индивидуумом и обеспечивающих рост его общеобразовательной подготовки и культуры, профессиональную ориентацию, осуществление различных этапов профессионального образования, его уверенное вхождение в социум с учетом своих склонностей и особенностей своего развития на основе широкого использования информационных обучающих технологий» (выделено нами. — *В.Б.*).

В этом длинном определении главными для нас сейчас являются подчеркнутые слова «рост его общеобразовательной подготовки и культуры» (поначалу в определении их не было, они появились в результате экспериментальной работы). Таким образом, продуктивное обучение по М.И. Башмакову — это нечто более лояльное к традиционной школе и предполагает не только «производственные модули», но и учебные, а также апеллирует к общеобразовательной подготовке и культуре.

Но как это относится к обучению математике? Можно постараться это понять, прочитав статью [2], помещенную в той же монографии. Известный петербургский учитель О.А. Иванов ввел понятие «пучка задач». Пучок задач — это такая их совокупность, определяющей характеристикой которой является наличие разнотипных связей между отдельными составляющими эту совокупность задачами, обеспечивающие включение обратной связи в процессе их решения. В статье приводится пример: даны 4 иррациональных неравенства, внешне чуть похожие друг на друга, которые предлагается учащимся решить. Затем учитель задает специальные вопросы («структурообразующие»), при ответе на которые вскрываются истинные связи между задачами «пучка», и в головах учащихся формируется системность знаний. «Но где же здесь продуктивное обучение, которое фигурирует в названии статьи?» — спросит читатель. Этот же вопрос задал себе и автор настоящей статьи и ответить на него не смог.

Наконец, компетентностный подход. Из рассуждений авторов пособия [4], как мы убедились выше, часто вовсе не ясно, что они хотят сказать. Это справедливо и по отношению к математике: то они изгоняют из школы «муляжи» (к которым, конечно, относятся почти все математические задачи), то говорят о приоритете мысленного экспериментирования (которое во многом используется при решении тех же задач). Так что содержательное обсуждение заявленных проблем пока не представляется возможным. Однако ясно главное: *конечная цель этих маловразумительных предложений состоит в переориентации традиционной системы обучения, в которой доминируют знания, на систему обучения, в которой доминирует действие*. Это же относится и к продуктивному обучению, и к методу проектов. Стало быть, проблема шире и затрагивает не только обучение математике, поэтому стоит поговорить о ней подробнее.

В путах свободы

Интересно понять, что движет людьми, предлагающими внедрять перечисленные выше педагогические новации. Очевидно, что все они в той или иной степени недовольны сложившейся системой образования. Главные ее недостатки они видят в насилии над ребенком и оторванности обучения от жизни. Итак, сторонниками «нового» движет: 1) стремление к гуманизму; 2) стремление к «качественному» образованию. Обсудим эти две тенденции по отдельности.

Критикуя современную школу, обычно указывают, что традиционная система обучения является насилием над ребенком: тут заставляют сидеть на уроках, слушаться, выполнять «никому не нужные задания» — в общем, играть по определенным правилам. Ребенок же — существо «стихийно-вольное» (цитата из фильма «Завтра была война»), ему нужно предоставить свободу. Свободу выбора, свободу действия, но и свободу ответственности (последнее плохо прослеживается в цитированных выше текстах). Отсюда — стремление к гуманизму. С другой стороны, традиционная система обучения ориентирована на получение знаний, на освоение некоторой части накопленного человечеством опыта (научного, культурного, социального), результаты обучения в обычной школе практически не используются в жизни — в том смысле, что их нельзя непосредственно «применить». Разумеется, ребенку гораздо интереснее изучать то, что ему близко и понятно, а также овладевать способами действий вместо того, чтобы изучать «абстрактные» вещи (вроде задач на бассейны) и овладевать знаниями, что предполагает значительные усилия. Отсюда — стремление к практико-ориентированному образованию, которое, по мысли некоторых авторов, a priori является качественным. *Обе тенденции в совокупности можно охарактеризовать как стремление к упрощению образования*.

По поводу первой тенденции — стремления к гуманизму — заметим следующее. «Игра по правилам» в обычной школе не является чем-то навязанным извне, а вполне адекватна тому, что происходит за окном. В любой организации, в любом коллективе всегда существуют правила, которым необходимо подчиняться. В зависимости от организации и коллектива они могут быть более или менее жесткими, но всегда остаются правилами. В качестве примера можно назвать соблюдение трудовой дисциплины или соблюдение норм этикета. С этой точки зрения традиционная школа вполне справляется со своей задачей — подготовкой к дальнейшему обучению и/или труду. С другой стороны, не вполне понятно, почему критики традиционной школы рисуют в своих книгах этакую школу-монстра, где любое проявление инакомыслия жестко карается? Ведь все зависит от учителя: у одного дети боятся слово сказать, у другого — раскованы, улыбаются. Другое дело, что в обычной школе свобода ученика ограничена: он должен изучить определенный круг предметов независимо от того, хочется ему этого или нет. Но это совершенно естественно: далеко не всегда и во взрослой жизни придется делать лишь только то, что хочется. Следует четко различать гуманизм, характеризующийся ограниченной свободой (но все же свободой!), и псевдогуманизм, характеризующийся вседозволенностью.

Теперь о второй тенденции — стремлении к практико-ориентированному образованию. Обычно связь школы с жизнью понимается критиками традиционной школы вульгарно — как утилитарность: «Учу только то, что мне пригодится».

Между тем связь обучения с жизнью представляется более сложным явлением, связанным, прежде всего, с воспитательной функцией школы. В самом деле, неужели мы «учим» историю, литературу, математику, физику только для того, чтобы «применить» их в жизни (например, поступить в вуз)? Нет, мы изучаем эти предметы, с одной стороны, для развития каких-то полезных умений (читать, думать, экспериментировать), с другой стороны, — для проникновения в сокровищницу человеческого опыта, для осознания себя частью Вселенной. Целостность страны и общества держится во многом на традициях, на коллективном интеллектуально-духовном опыте, накопленном предыдущими поколениями и реализованном в произведениях культуры и науки. Изучая прошлое, вникая в переживания, размышления, подвиги и подлости предков, мы тем самым создаем себе ориентировочную основу для действия сегодня и завтра. В этом смысле знаниевое обучение имеет ничуть не менее деятельностный характер, чем продуктивное.

Интересно теперь представить, как будет выглядеть «продукт свободной школы» — молодой человек, воспитанный в духе псевдогуманизма и лишенный фундаментальных знаний и нравственных авторитетов. Ясно, что этот человек не вобрал в себя какой-то ощутимой части того коллективного интеллектуально-духовного опыта, о котором только что шла речь. Чем же он обладает вместо этого? В предметном плане, очевидно, набором некоторых компетенций, которые сформировались у него в результате хаотичной деятельности в «городе-как-школе» (или при какой-то другой форме обучения). Таким образом, мы получили *человека компетентного, но необразованного*. Этот субъект больше всего напоминает зверька, владеющего ограниченным набором навыков операционального характера, своеобразную «обезьянку XXI века». Эта обезьянка умеет говорить на нескольких языках, владеет компьютером, умеет считать деньги, писать и читать несложные тексты (например, инструкцию по пользованию микроволновой печью), знает, что такое «безопасный секс»… Но и только. Остальное — по мере надобности: обезьянка способна к самообучению в определенных рамках (например, может выучить еще один язык или освоить новую компьютерную программу). В воспитательном плане это существо можно охарактеризовать как мозаично-эгоистичное. Мозаичность сознания обусловлена отсутствием системных знаний об окружающем мире — из-за постоянной концентрации на удовлетворении сиюминутных образовательных потребностей. Эгоистичность порождена чрезмерной свободой, выпячиванием своего «я» как главной ценности в мире.

Понятно, что таким существом несложно управлять, и есть подозрение, что западные (и нынешние отечественные) образовательные инициативы направлены именно на формирование описанного типа человека: он грамотный местами, но неграмотный вообще, ибо у него нет знания самого по себе, безотносительно к его каждодневным практическим нуждам. Человек же необразованный и невоспитанный не представляет большой угрозы власть имущим, а наоборот, выгоден в качестве «грамотного» потребителя и «грамотного» избирателя.

И последнее. О названии этой статьи. В свое время автору довелось прочесть книгу «Новые религиозные культы и школа», в которой даны краткие описания наиболее распространенных сектантских движений, активно вербующих в свои ряды «ищущую» молодежь. В процессе написания настоящего текста название книги всплыло непроизвольно и теперь понятно, почему. Согласитесь, есть что-то в цитированных материалах религиозное: новые миссионеры от педагогики, насмотревшись «как у них», фанатично пытаются обратить других в свою веру. Фанатизм опасен тем, что эмоции часто подменяют собой аргументы, и спор превращается в противостояние до тех пор, пока какая-либо сторона не возьмет верх — обычно «миссионеры» за счет внушительных финансовых вливаний и административного ресурса. Со временем продавленные решения приводят к краху, поскольку здравая критика оппонентов осталась не услышанной и не принятой во внимание. Хочется надеяться, что новые педагогические культы так и останутся учениями немногочисленных сект, а обычная школа останется обычной школой — со знаниями, умениями и навыками.

Литература

1. *Башмаков М.И.* Что такое продуктивное обучение // Теория и практика продуктивного обучения. М.: Народное образование, 2000.

2. *Бузлаева Е.Н., Иванов О.А.* Пучки задач как средство построения методик продуктивного обучения // Теория и практика продуктивного обучения. М.: Народное образование, 2000.

3. *Иванов Д.А., Митрофанов К.Г., Соколова О.В.* Компетентностный подход в образовании. Проблемы, понятия, инструментарий: Учеб.-метод. пособие. М.: АПКиПРО, 2003.

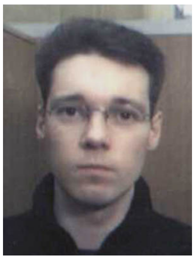
4. *Крылова Н.Б., Леонтьева О.М.* Школы без стен: перспективы развития и организация продуктивных школ. М.: Сентябрь, 2002.

5. Метод проектов в школе. Специальное приложение к журналу «Лицейское и гимназическое образование». Вып. 4. М.: 2003.

Вернуться к содержанию

Математики-педагоги

Методист-математик Дмитрий Лукич Волковский (к 140-летию со дня рождения)



БУСЕВ Василий Михайлович
редактор газеты «Математика»,
редактор издательства «Просвещение»
vbusev@yandex.ru

Предисловие

Дмитрий Лукич Волковский (1869–1934) — известный в свое время методист начальной арифметики. Основное время его творчества приходится на первые два десятилетия XX века — время поисков и находок в отечественной и зарубежной педагогике. Как человек талантливый, трудолюбивый и преданный своей профессии, Д.Л. Волковский быстро включился в поиски. Результатом его деятельности стали собственные статьи и книги по методике обучения арифметике в начальной школе, а также перевод книг известных зарубежных педагогов Э. Бореля, В.А. Лая и др., с которыми он вел переписку.

Многолетняя кропотливая педагогическая и литературная деятельность принесла свои плоды: Д.Л. Волковский стал не просто рядовым методистом, а создал свое направление в методике начальной арифметики, своеобразное ответвление неогрубеизма «примиряющего» характера (об этом см. далее).

Несмотря на имеющиеся заслуги, имя Д.Л. Волковского сегодня совершенно забыто. Трудно назвать хотя бы одну работу по истории математического образования, написанную за последние десятилетия, в которой освещался бы его вклад в теорию и практику обучения арифметике в начальной школе. До недавнего времени мы не располагали хоть какими-то сведениями биографического характера об этом незаурядном человеке. Автору посчастливилось обнаружить в Научном архиве Российской академии образования автобиографию Д.Л. Волковского (Ф. 28. Оп. 1. Д. 3). Публикуя данный документ, мы надеемся, что это послужит стимулом к началу серьезных исследований в области истории методики начальной арифметики, в которой фигура Дмитрия Лукича Волковского занимает видное место.

Автобиография Дмитрия Лукича Волковского

Часть 1. Я родился 11 февраля 1869 г. в деревне Юрасовке Сердобского уезда Саратовской губернии. Отец мой был учителем сперва в селе, потом в г. Петровске Саратовской губернии и, наконец, в Саратове. Первые три года своей жизни я провел в селе, следующие 5 лет в г. Петровске Саратовской губернии, а затем в Саратове.

Первоначальной грамоте учил меня отец по «Родному Слову» Ушинского. Эта книжка, благодаря умелому и талантливому руководству отца, произвела на меня сильнейшее впечатление.

Вследствие бедности семьи (кроме отца и матери в семье было нас три брата) мне с 16 лет приходилось помогать отцу репетировать учеников, а в старшем классе средней школы, после смерти отца, иметь самостоятельные уроки.

Преданность отца педагогическому делу, внушенная и мне, послужила решающим моментом в выборе моей профессии: будучи 18 лет, я окончательно и бесповоротно решил посвятить себя педагогической деятельности, но только по окончании высшей школы. но вследствие бедности я не имел возможности тотчас же по окончании средней школы поступить в высшую и вынужден был несколько лет прослужить учителем в низшей школе в г. Петровске Саратовской губернии, чтобы заработать себе денег для продолжения образования.

Это учительство, сложившееся для меня счастливым образом, вместе с сильным влиянием на меня в детстве и юности отца, окончательно определили мою симпатию к низшей, народной школе, каковую к этой школе я питаю и доселе.

Будучи студентом, я имел уроки, чтобы заработать себе денег для окончания высшего образования. По окончании курса в высшей школе в 1896 г. я до сентября 1906 г. был преподавателем математики и методики арифметики в частных учебных заведениях г. Саратова.

С 1898 г. по 1901-й год я был слушателем летних педагогических курсов, устраиваемых Саратовским Губернским Земством для учащих народных школ. Здесь я слушал видных педагогов по всем предметам, читаемым на курсах. Но центром моего внимания была методика арифметики, которую вели известные методисты — А.И. Гольденберг, С.И. Шохор-Троцкий, К.П. Аржеников и Г.М. Вишневский, с которыми я вне курсов вел частые беседы, а с некоторыми из них — А.И. Гольденбергом и С.И. Шохор-Троцким — переписывался. Из всех методистов по арифметике самое сильное впечатление произвел на меня А.И. Гольденберг. Он окончательно определил мою склонность заняться методикой арифметики. И уже в 1900 г., по его рекомендации, я был лектором по методике арифметики на летних педагогических курсах для учащих начальных школ в г. Камышине Саратовской губернии. В 1903 г. я выступал в качестве лектора по методике арифметики на летних педагогических курсах в Саратове.

Мое увлечение методикой арифметики заставило меня серьезно и основательно изучить историю методики и самую методику арифметики в России .... (с самого начала). Но так как в Саратове было весьма мало материала для этого, то я в течение нескольких лет по летним, рождественским и пасхальным каникулам ездил в Москву и Петроград, чтобы раздобыть себе источники и пособия по своей специальности. В результате этих поездок у меня образовалась ценная библиотека, в которой есть раритеты (редкие книги).

В Саратове же я занимался литературной деятельностью в качестве сотрудника почти всех местных газет и журнала «Саратовская Земская Неделя». В газетах я поместил несколько фельетонов литературно-критического, публицистического, исторического и педагогического характера, а также немало библиографических обзоров и массу злободневных заметок, из которых некоторые сыграли большую роль в судьбе тех учреждений, где я служил, а также имели влияние на педагогические курсы и на съезды духовенства. Из газетных статей я должен отметить большой фельетон «Литературные поминки», написанный мною по случаю 25-летия со дня смерти Ф.М. Достоевского.

Моя литературно-публицистическая работа в газетах послужила поводом к тому, что меня пригласили преподавателем русского языка в Саратовское музыкальное училище, преобразованное потом в консерваторию. Здесь я должен отметить свое публичное выступление 26 мая 1899 г. по случаю юбилейного чествования А.С. Пушкина в музыкальном училище с речью: «Отношение поэзии Пушкина к музыке», которая была предназначена к печати в петроградском журнале «Театр и Искусство», но, к большому сожалению, затеряна редакцией.

Работая в саратовской прессе, я в то же время сотрудничал в столичных журналах — «Педагогический сборник» (Петроград), «Русская школа» (Петроград), «Педагогический листок» (Москва) и в московской газете «Русские ведомости».

Из многих статей, здесь помещенных, стоит отметить:

1) «К вопросу о признаке делимости на 8» («Педагогический сборник», 1901 г., № 3);
2) «По поводу новой программы арифметики в начальной школе» («Русская школа», 1902 г., №№ 10, 11 и 12);
3) «Реформа в курсе арифметики средней школы» («Русская школа», 1903 г., №№ 5 и 6);
4) «Беседы по счислению А.И. Гольденберга» («Педагогический листок», 1903 г., кн. 1, 2, 4, 6, 7, 8; 1904 г. — во всех книжках);
5) «Памяти К.Д. Ушинского» («Педагогический листок», 1905 г., кн. 8);
6) «Арифметические сборники задач А.И. Гольденберга. К вопросу о реформе курса арифметики в средних учебных заведениях» («Русские ведомости», 1903 г., №№ 195 и 197);
7) «Памяти академика-математика В.Я. Буняковского» («Русские ведомости», 1904 г., № 336).

Кроме того, в «Русских Ведомостях» помещено несколько моих корреспонденций из Саратова по общественным вопросам.

По предложению Е.П. Гольденберг, вдовы педагога-математика, и Саратовского губернского земства, я принял на себя обязанность продолжать печатание «Бесед по счислению» А.И. Гольденберга. И в 1906 г. под моей редакцией вышла в издании Саратовского губернского земства книга: «А.И. Гольденберг. Беседы по счислению».

В 1906 г. вышла из печати в Москве в издании Думнова моя книжка — «Собрание арифметических упражнений для гимназий и реальных училищ. Курс 3-го класса. Дополнительный курс к «Собранию арифметических упражнений для гимназий и реальных училищ А.И. Гольденберга». Эта книжка составлена мною только потому, чтобы дать ход замечательным в свое время книгам А.И. Гольденберга «Собрание арифметических упражнений для гимназий и реальных училищ»: без дополнительного выпуска, удовлетворяющего официальным требованиям программ Министерства Народного Просвещения, Учебный комитет при Мин. Нар. Просв. не допускал в средние школы упомянутые задачники А.И. Гольденберга. Если бы не это обстоятельство, я бы не стал выпускать в свет своего «Арифметического задачника для гимназий и реальных училищ».

В 1906 г. в журнале «Вестник опытной физики и элементарной математики» (№ 409) напечатана моя статья «Судьба русской математической журналистики».

Такова моя педагогическая и литературная деятельность за время моего пребывания в Саратове с 1896 по 1906-й год.

Часть 2. В 1906 г. я был приглашен известным московским педагогом Д.И. Тихомировым быть его помощником и секретарем по редакции издаваемых им журналов «Юная Россия» и «Педагогический листок» и целой серии разных книг. Эту обязанность я нес на себе с 21 сентября 1906 г. по февраль 1908 г.

В «Педагогическом листке» я вел отдел — «Среди книг и журналов», а также написал ряд статей, из которых стоит упомянуть: «Памяти Н.И. Пирогова, знаменитого врача и педагога» (1906 г., кн. 8), «Жизнь И. Христа Ренана» (1907 г.) и в каждой книжке поместил ряд библиографических и критических заметок.

Во время своего пребывания в Москве до октябрьской революции 1917 г. я состоял сотрудником журналов: «Вестник воспитания» (Москва), «Для народного учителя» (Москва), «Педагогическое обозрение» (Москва), «Вопросы и нужды учительства» (Москва), «Психология и дети» (Москва), «Вестник опытной физики и элементарной математики» (Одесса), «Математическое образование» (Москва), «Математический вестник» (Москва) и др. и сотрудником московских газет «Русские ведомости» и «Утро России».

Из журнальных статей за этот период стоит отметить:

1) в «Вестнике воспитания»: а) «Один из приемов обучения арифметике в американских школах» (1909 г., № 5); б) «Арифметика Л.Н. Толстого» (1913 г., № 3); в) «Значение картинок при первоначальном обучении арифметике» (1913 г., № 7);

2) в журнале «Для народного учителя»: а) «Как обучают дробям в начальных школах немецкой Швейцарии» (1912 г., №№ 14, 15, 16); б) «Очерки по методике арифметики» (1915 г., №№ 9 и 10); в) «значение экспериментальной дидактики для обучения счислению и математике» (1915 г., №№ 11–15);

3) в «Педагогическом обозрении»: а) «Как обучают десятичным дробям в начальных школах немецкой Швейцарии» (1913 ., №№ 3–5); б) «Математика в начальных школах на 2-м Всероссийском съезде преподавателей математики» (1914 г., № 1);

4) в «Вопросах и нуждах учительства»: «Методические очерки по начальной арифметике» (выпуски IX-й и X-й);

5) в «Вестнике опытной физики и элементарной математики»: «К истории Московского математического кружка» (1908 г., № 3);

6) в «Математическом образовании»: «Памяти А.И. Гольденберга» (1912 г., № 6);

7) в «Математическом вестнике»: а) «Значение числовых фигур при первоначальном обучении арифметике» (1914 г., № 1); б) «Особенности области чисел от 1 до 20» (1914 г., № 4).

Кроме того, во всех этих журналах, а также в газетах «Русские ведомости» и «Утро России» я поместил ряд библиографических заметок по математике, а в «Утро России» — и по другим областям знания, а также фельетон по общественным вопросам.

Д.Л. Волковский

С переездом в Москву, работая главным образом в столичной прессе, я сотрудничал и в провинциальной печати — в саратовских газетах по общественно-политическим вопросам и в журнале «Кубанская школа» по вопросам педагогическим (1915 г., № 3 и др.).

По переезде из Саратова в Москву я решил изучить иностранную литературу по математике, главным образом, для народных школ. Не найдя по данному вопросу никаких указаний в России, я непосредственно обратился за границу; и с этой целью завел переписку с известными педагогами и учеными: Лаем (Германия), Штёклином (немецкая Швейцария), профессором Борелем (Париж), Феликсом Мортелем (Париж), V. Brouet (Париж), проф. Д.Е. Смитом (Америка) и др.

Результатом этой переписки и изучения немецкой, французской и английской (американской) литератур явился перевод на русский язык по моей инициативе и под моей редакцией следующих книг:

1) В.А. Лай. Руководство к первоначальному обучению арифметике, основанное на результатах дидактических опытов. Пер. с нем. Москва. Издание Сытина. 1909 г., стр. VI+292. В 1916 г. вышло 5-е издание этой книги, переработанное. Изд. Думнова.

2) Борель. Арифметика. Пер. с франц. Москва. 1910 г. Изд. Сытина. Стр. 218+IV.

3) И. Штёклин. Методика арифметики. I–III тома. Пер. с нем. Москва. Изд. Сытина. 1911–1914 гг. I т., стр. XXIV+551; II т., стр. VIII+527; III т., стр. XII+528.

4) И. Штёклин. Арифметические задачники. Вып. I–VII. Пер. с нем. Москва. Изд. Сытина. 1913–1914 гг.

5) Уэнтуорт и Рид. Первоначальная арифметика. Пер. с англ. Москва. Изд. Сытина. Стр. XXVIII+222.

6) Ж. Таннери. Курс теоретической и практической арифметики. научный курс арифметики. Пер. с франц. Москва. 1913 г. Изд. Сытина. Стр. XX+672.

«Руководство к первоначальному обучению арифметике» Лая, «Методика арифметики» с «Арифметическими задачниками» Штёклина и «Первоначальная арифметика» Уэнтуорта и Рида имели и доселе имеют большое влияние на обучение арифметике в начальных школах России. Под влиянием этих книг создалось в России *новое* направление в области методики арифметики, которое, по меткому и верному выражению В.Г. Фридмана (см. его «Методику арифметики»), можно охарактеризовать словом «*неогрубеизм*». То есть некоторые методисты, *отвергая изучение чисел в пределе 1-й сотни*, на манер известных педагогов — немецкого Грубе и русского Евтушевского, стоят за то, чтобы *в пределе первого десятка* сохранить такое изучение. К этой характеристике следует добавить, что под влиянием этих книг в арифметике для начальных школ *упрочилось* концентрическое расположение всех отделов арифметики, а под влиянием «Первоначальной арифметики» Уэнтуорта и Рида проникла идея фузионизма (слияние арифметики, алгебры и геометрии между собою), хотя бы и в первой стадии своего развития.

Такое сильное влияние названных книг на нашу методическую литературу по математике не помешало тому, чтобы мне занять *иное*, самостоятельное место в этом направлении. Стоя за так называемую методу изучения чисел в пределе первого десятка, только *при восприятии чисел*, в дальнейшем я держусь так называемой методы изучения действий. Таким образом, я примиряю методу изучения чисел с методой изучения действий, ибо такой характер обучения арифметике соответствует современным данным экспериментальной психологии и дидактике по вопросу о развитии числовых представлений у детей.

В моих работах — «Руководство к «Детскому миру в числах» (ч. 1), в «Детском мире в числах» (ч. 1) и в «Математике для детей» (ч. 1) выявлена еще другая особенность: рассматривая понятие числа с психологической точки зрения, я примиряю три методических течения: теорию непосредственного восприятия чисел (при помощи так называемых числовых фигур), теорию счета и теорию измерения.

С 1913 г. стали выходить в свет мои собственные труды: 1) «Детский мир в числах», чч. I, II и III. Москва. Изд. Сытина. 1913–1916 гг. 2) «Руководство к «Детскому миру в числах», чч. I и II. Москва. Изд. Сытина. 1914–1915 гг.

За время с 1907 г. по 1917 г. я состоял преподавателем методики арифметики в нескольких частных средних учебных заведениях и преподавателем математики в немецкой реформаторской школе и в театральном училище.

В июле 1912 г. был слушателем краткосрочных курсов, устроенных Московским учебным округом для учащих средних учебных заведений.

Был лектором по методике арифметики на летних педагогических курсах для учащих народных школ в Саратове в 1913 г., в Москве в 1916 г. и в том же году в г. Анапе Кубанской области. Получал много приглашений (до 20) на краткосрочные педагогические курсы для учащих народных школ в разные места России, но, к сожалению, вследствие усиленной занятости литературным делом приходилось отказываться от этих приглашений.

Выступал с докладами на Всероссийских съездах: на 1-м Всероссийском съезде преподавателей математики в Петрограде (с 27 декабря по 3 января 1912 г.), на 2-м Всероссийском съезде преподавателей математики в Москве (с 26 декабря 1913 г. по 3 января 1914 г.) и на 1-м Всероссийском съезде учащих начальных школ в Петрограде в декабре 1913 г. С 1907 г. состою членом Московского математического кружка, где выступал с докладами.

Такова моя деятельность до Октябрьской революции 1917 г.

Часть 3. Со времени Октябрьской революции я был преподавателем математики в 1-й и 2-й ступени трудовой школы. В 1919 и в 1920 гг. я был лектором по методике математике в Институте народного образования университета имени Шанявского. В марте 1919 г. был избран преподавателем методики математики в Академию народного образования. В 1920 и 1921 гг. был лектором по методике математики на нескольких военных курсах по подготовке учителей по ликвидации неграмотности. В 1921–1922 гг. был преподавателем в техническом училище по эксплуатации железных дорог. С 1920 по 1924 гг. был преподавателем математики на двух рабфаках. В 1919, 1920 и 1921 гг. имел от 48 до 56 рабочих часов в неделю в учебных заведениях и на курсах.

В 1919 г. занимался изучением постановки обучения математике в училище для глухонемых. В 1920 г. принимал участие в работах Комиссии при Наркомпросе по выработке новых программ для трудовой школы. С декабря 1918 г. состоял одним из учредителей и членом правления одного из московских кружков лекторов-педагогов. В 1922 г. внесен в список научных деятелей Московской комиссии по улучшению быта ученых (КУБУ).

Выступал в качестве лектора на краткосрочных педагогических курсах для учащих в начальных школах: летом 1918 г. в г. Елабуге и в г. Яранске Вятской губернии, в 1919 г. в январе в г. Зарайске Рязанской губернии и в Москве для учащих железнодорожных школ, весной в Москве на двух курсах; в июне в Москве на курсах, устраиваемых Академией народного образования, в июле в Москве для учащих в школах дефективных детей, в августе в г. Веневе Тульской губернии и в г. Рязани, в сентябре в г. Нерехте Костромской губернии, в октябре в г. Покрове Владимирской губернии, в декабре в Москве; в 1920 г. в мае в г. Ржеве Тверской губернии, в июне и июле в Москве в Институте для дефективных детей, в августе и сентябре на двух курсах на Кавказе в г. Пятигорске, в ноябре в Москве в Высшем педагогическом институте; в августе 1921 г. в г. Сызрани Симбирской губернии, летом 1923 г. в селе Болшеве Ярославской ж.д.

С 1922 г. я начал сотрудничать в журнале Московского отдела народного образования «Вестник просвещения», где помещена статья известного педагога Лая «Первый год обучения арифметике», переведенная с немецкого под моей редакцией (1922 г., № 8, стр. 38–72). Эта статья в 1923 г. вышла отдельной брошюрой в издании «Работника просвещения». Кроме того, в журнале помещено 20 моих библиографических рецензий и заметка — «Памяти педагога-математика К.Ф. Лебединцева».

В московском журнале «Просвещение на транспорте» помещено несколько моих библиографических заметок. В 1918 г. вышла моя книжка «Числа первого десятка» (для детей дошкольного возраста), а в 1919 г. — «Руководство» к этой книжке. В 1920 г. петроградским Госиздатом (без моего ведома и разрешения) выпущены в свет 3 части «Арифметического задачника» И. Штёклина в моем переводе с немецкого. В 1923 г. московским Госиздатом выпущены в переработанном виде мои книги: 1) «Детский мир в числах», чч.I, II и III; 2) «Руководство к «Детскому миру в числах», чч. I и II; 3) «Числа первого десятка»; 4) Руководство к «Числам первого десятка». В том же году тем же издательством выпущены в измененном виде под моей редакцией следующие книги: 1) Борель. Арифметика. Пер. с франц. 2) Уэнтуорт и Рид. Первоначальная арифметика. Пер. с англ. 3) А.И. Гольденберг. Беседы по счислению.

В 1925 г. за границей, в Латвии, вышли две мои книги — «Детский мир в числах», чч. I и II, в переработанном виде.

В настоящее время (с 1924 г.) я состою преподавателем методики математики в одном из московских педтехникоумов.

В настоящем году исполнилось 36 лет моей педагогической деятельности и 27 лет моей литературной деятельности. Подводя итог своей деятельности, могу отметить: 1) что я состоял преподавателем в 22 учебных заведениях, из них в 3 низших, в 3 высших и в 16 средних учебных заведениях; 2) был лектором на 32 педагогических курсах; 3) сотрудничал в 17 журналах и 8 газетах; 4) мною написано: а) 10 собственных книг; б) под моей редакцией и отчасти в моем переводе 17 книг; в) до 60 журнальных статей; г) 10 газетных фельетонов; д) до 500 библиографических и других журнальных и газетных заметок.

В настоящее время подготовляю к печати 3-ю часть «Методики для детей»[1] для 3-го года обучения в первой ступени.

Москва. 1925 г. 18 ноября.
Д. Волковский

Заключение

Автобиография Д.Л. Волковского не охватывает еще 9 лет его жизни (1926–1934). Содержание и характер деятельности Д.Л. Волковского в эти годы еще предстоит установить. Сейчас же отметим несколько бесспорных фактов его дальнейшей биографии.

В 1920-е гг. Д.Л. Волковский не написал ни одной новой книги и в основном занимался переработкой книг, созданных им в предреволюционное десятилетие.

Д.Л. Волковский критически относился к комплексной системе обучения математике[2] (), что не могло не повлиять на характер переработки учебников: они не были приспособлены к работе по этой системе.

Принимал ли Д.Л. Волковский участие в составлении программ для трудовой школы в 1923–1931 гг., пока неизвестно. Вероятнее всего, что нет: слишком разнились взгляды самого Д.Л. Волковского и те соображения, которые высказывались в объяснительных записках к программам. Однако его фамилия стоит под программой для начальной школы 1932 г. (она появилась после известных постановлений ЦК ВКП(б) о средней школе).

По всей видимости, последнее, что было сделано Д.Л. Волковским — выпуск «Методики арифметики в начальной школе» (1934) и редактирование переводов книг Э.Л. Тондайка, посвященных психологии обучения арифметике и алгебре.

В некрологе на Д.Л. Волковского, помещенном в журнале «Математика и физика в школе» (1934, № 4), сказано следующее: «Смерть постигла его среди разносторонней и напряженной учебно-литературной работы». Прочитав его биографию, не приходится сомневаться, что так оно и было.

В заключение приведем небольшой список литературы, где можно почерпнуть некоторые сведения о вкладе Д.Л. Волковского в развитие теории и практики обучения арифметике в начальной школе.

1. *Ланков А.В.* К истории развития передовых идей в русской методике математики. М.: Учпедгиз, 1951. С. 136.

2. *Пчелко А.С.* Хрестоматия по методике начальной арифметики. М.: Учпедгиз, 1940. С. 84–85.

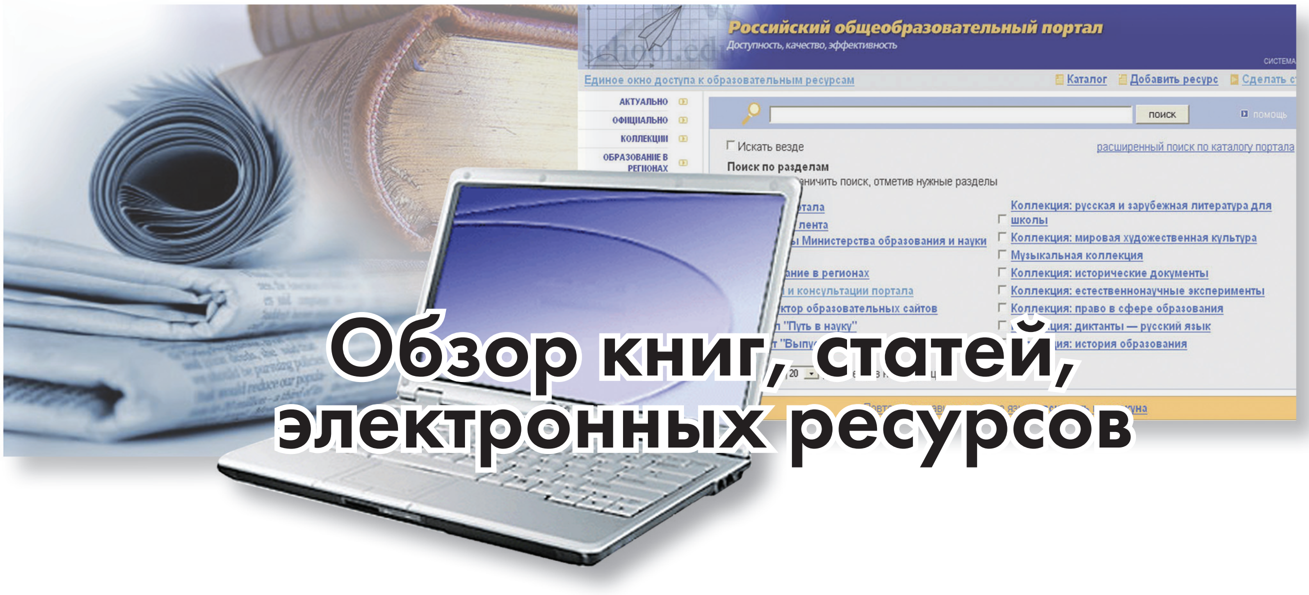
3. *Фридман В.Г.* Учебник методики арифметики. М.–Пг., 1923. С. 104.

4. *Штейнгардт Д.А.* Основные вопросы развития методики начального обучения арифметике в советской школе (1917–1950 гг.). Диссертация на соискание ученой степени кандидата педагогических наук. М., 1952. С. 117–120, 314–319.

Вернуться к содержанию

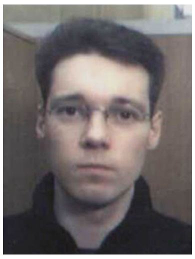
[1] Это ошибка: имелась в виду «Математика для детей». — *В.Б.*

[2] О ней см. нашу публикацию в сборнике «Архимед», вып. 4, 2008: http://www.mathedu.ru/histedu/shkoli-smolenskoy_gubernii_v_1922-1927_godi.doc



Обзор книг, статей, электронных ресурсов

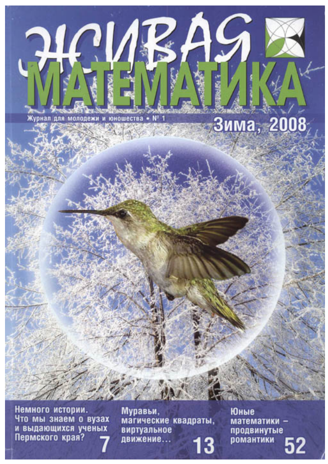
О пермском журнале по математике для школьников



БУСЕВ Василий Михайлович
редактор газеты «Математика»,
редактор издательства «Просвещение»
vbusev@yandex.ru

В 2008 г. в Пермском крае произошло интересное и в каком-то смысле уникальное событие — начал издаваться математический журнал для молодежи «Живая математика». Журнал для школьников, да еще по математике, да еще региональный, при этом изданный большим форматом на 74 страницах, красочный и нарядный — это что-то из области фантастики в современном мире образования, где вопросы сдачи ЕГЭ уже практически вытеснили все доброе, разумное, вечное.

Из первого номера мы узнаём, что издание журнала — инициатива Святослава Бывальцева, некогда увлеченного математикой школьника, затем студента мехмата Пермского университета, а ныне издателя широкого спектра литературы (в том числе, краеведческой). Признаться, поначалу это вызвало недоверие: известно немало случаев, когда частная инициатива, не найдя сочувствия в обществе, угасала так же быстро, как и появлялась. Но вот уже вышел и второй номер журнала, что вселяет надежду на долгожительство начинания.



Обратимся к содержанию первого выпуска журнала. Вот его рубрики: «Вперед в прошлое», «Это поймет каждый, или занимательно о научном», «Точка отсчета, или календарь событий», «Пять баллов, или учись, школяр!», «И в шутку, и всерьез». В первой из названных рубрик помещены статьи: «Уральский математик Иван Михеевич Первушин» и «О развитии математического образования в Пермском крае».

Во второй рубрике помещено немало научно-популярных статей, написанных не только учеными и преподавателями университета со стажем, но и молодежью — аспирантами и начинающими педагогами. Среди названий статей есть вполне традиционные: «Актуальные проблемы теории чисел», «О периодических функциях», «Магические квадраты», «Возможности математического моделирования»; есть и менее привычные для слуха интригующие названия: «Как заставить муравьев решать задачи за нас, или почему природа не умеет дифференцировать», «Мур? Мяу!».

Еще одна большая рубрика — «Пять баллов, или учись, школяр!». Здесь помещены материалы региональных олимпиад, статьи о методах решения логических задач и методах решения уравнений.

В рубрике «Точка отсчета, или календарь событий» рассказано о мероприятиях, проходивших в Пермском крае: конференции по истории науки и образования в сентябре 2007 г., конкурсе молодых ученых и др.

Второй номер журнала имеет примерно ту же структуру. Перечислим названия некоторых статей: «История об Архимеде, весах и алгебре», «Улицы Перми, названные именами ученых-математиков», «Простые числа: за страницами школьных учебников», «Приключения Васи Ёлкина в стране реальной бесконечности», «Перетягивание площадей», «Эвристические задания для учащихся», «Праздник числа Пи — впервые в Пермском крае». Уже только сами эти названия приглашают прочесть сами статьи. В самом деле, какие такие приключения произошли с Васей Ёлкиным? Что это за праздник числа Пи? И почему улицы Перми называли именами ученых-математиков?

Подводя итог своим впечатлениям, скажу уверенно: пермским коллегам удалось создать замечательный научно-популярный журнал для школьников, студентов и учителей. Причем замечателен он не только своим содержанием, но и оформлением. И дело не столько в глянцевой бумаге и обилии цвета. Главное заключается в том, что оформление получилось добрым, юмор и улыбки здесь на каждой странице: фотографии, коллажи, рисунки, заставки, названия статей и рубрик — все вызывает положительные эмоции. Спасибо всем, кто подарил нам этот журнал, так необходимый именно сейчас, когда все Настоящее практически исчезло, уступив место многоликой Фальши.

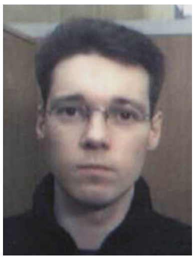

ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА

Методы решения логических задач

(по материалам заочной школы)

Разворот журнала «Живая математика»

Вернуться к содержанию



БУСЕВ Василий Михайлович
редактор газеты «Математика»,
редактор издательства «Просвещение»
vbusev@yandex.ru

В 2007 г. в Российском государственном гуманитарном университете начал работать семинар «Культура детства: нормы, ценности, практики». В поле зрения участников семинара находятся проблемы отечественной и зарубежной истории детства. Семинар имеет следующие задачи:

• заложить фундамент научного направления, связанного с исследованиями детства;

• соединить научный потенциал сложившихся ученых и молодых исследователей;

• сформировать информационную среду профессионального общения (в том числе, создать собственный сайт и электронную библиотеку);

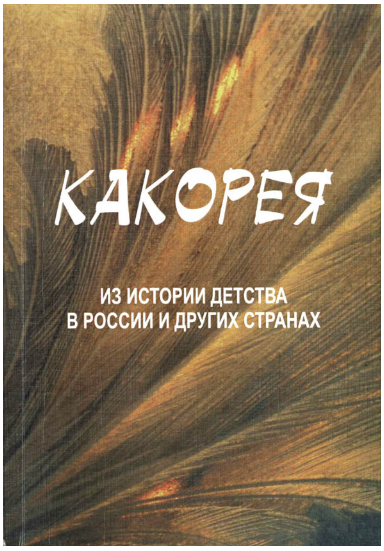
• отразить отечественные и зарубежные тенденции исследований по детству в ежегодных сборниках трудов.

Ниже будут рассмотрены выпуски 1–3 трудов семинара.

Первый выпуск называется **«Какорея. Из истории детства в России и других странах»** и содержит результаты научных исследований отечественных и зарубежных ученых. Он открывается большой статьей известного английского антрополога и историка детства *Катрионы Келли* «Об изучении истории детства в России XIX–XX веков». Статья носит историографический и методологический характер, содержит множество ссылок на зарубежную литературу, посвященную истории детства в России.

В статье *И.П. Кулаковой* «История интеллектуального быта и российская традиционная культура: кабинет отца во впечатлениях детства (XVIII–начало XX в.)» прослежена история возникновения такого помещения, как кабинет; рассмотрены особенности кабинетов, принадлежащих лицам разных полов и разных социальных слоев. Кабинет отца оказывал немалое влияние на детей: он притягивал свой недоступностью (кабинет был местом уединения, нередко детям находиться в нем запрещалось) и провоцировал детей на «преступные» действия, например, забраться в кабинет в отсутствие отца и читать его книги. Таким образом, кабинет вносил свой вклад в воспитание и образование детей.

Игры и игрушки детей первых лет советской власти рассмотрены в статье *Ю.Г. Саловой* «Игровое пространство советского ребенка-дошкольника в 1920-е годы». «Особенностью рассматриваемого периода является прямое использование игрового пространства детей в сугубо политико-воспитательных целях», – отмечает автор. Была создана Центральная комиссия по игрушкам, которая занималась разработкой новых игр и игрушек. Большое внимание уделялось коллективным играм, отвечавшим духу времени. Среди игр были такие: «Колхоз», «Пятилетка», «Безбожник». Интересно, что имело место резкое неприятие кукол – якобы потому, что кукла «с локонами и нарядно одетая воспитывала в ребенке индивидуальные наклон-



ности, суживала игру его до отражения только мелкобуржуазного быта». Кукол власти побороть не удалось – дети упорно мастерили их из подручного материала. Трудно было бороться и с религиозными играми начала 1920-х гг.

Статья *С.Г. Леонтьевой* «Дети и идеология: пионерский случай» посвящена анализу тех идей, которые власть пыталась доносить до детей через пионерскую организацию. В качестве источника автор взяла официальный текст – Устав пионерской организации. Сопоставление разных редакций уставов между собой позволило проследить за всеми изменениями и понять причины этих изменений.

А.В. Чащухин в статье «Маникюр – "битлы" – часики. Культовые вещи советского подростка 1960-х годов» рассмотрел особенности внешнего вида подростков этого времени (одежда, обувь, предметы макияжа) и их увлечения – музыку и танцы. Новые веяния 1960-х гг. сравниваются с практикой ушедшей сталинской эпохи.

В заключение обзора первого выпуска трудов семинара остановимся на статье *М.В. Тендряковой* «Компьютерные игры: хорошо знакомое новое». Автор обращает внимание на то, что сюжеты компьютерных игр не отличаются принципиально от сюжетов обычных игр: те же соревнования на скорость и ловкость, та же игра в войну. На исторических примерах автор показывает, что детские игры могли быть совсем не безобидными, поэтому жестокость компьютерных игр тоже не является чем-то новым. Автор считает, что современные агрессивные детские игры, в том числе компьютерные, являются просто отражением взрослой реальности. Большего внимания заслуживает не жестокость игр, а виртуальность происходящего: погружаясь в иргу, человек перестает адекватно воспринимать мир («смерть – это то же самое, что и Game Over»). Компьютерные игры строго детерминированы, действовать в игре можно только в неких заранее определенных рамках, выйти за которые нельзя. Как показали исследования, у дошкольников, увлекающихся компьютерными играми, воображение развито значительно хуже, чем у «обычных» детей. Виртуальный алгоритмизированный мир учит достигать заданных программой целей, но не учит ставить эти цели. Таким образом, компьютерные игры опасны потому, что, уводя человека из реального мира, они не позволяют ему развиваться.

Второй и третий выпуски трудов семинара представляют собой антологию текстов под общим названием **«Городок в табакерке»**. В первую часть вошли тексты, содержание которых относится к 1890–1940 гг., во второй части представлены источники, характеризующие 1940–1990 гг. Тексты в каждой части антологии расположены в хронологическом порядке, по десятилетиям. В антологии собраны достаточно далекие друг от друга по жанру тексты: документы, интервью, школьные сочинения, дневниковые записи и т.д. Внутри 10-летних периодов они разбиты на «Воспоминания», «Взрослые о детях» и «Дети о себе». Чтобы дать некоторое представление о характере текстов, перечислим названия некоторых из них, помещенных в первой части антологии:

• Жизнь крестьянских детей в 1890-х годах: воспоминания учеников церковно-приходских школ (с. 17–38);

• *Рыбников Н.А.* Из рода в род (воспоминания, с. 38–55);

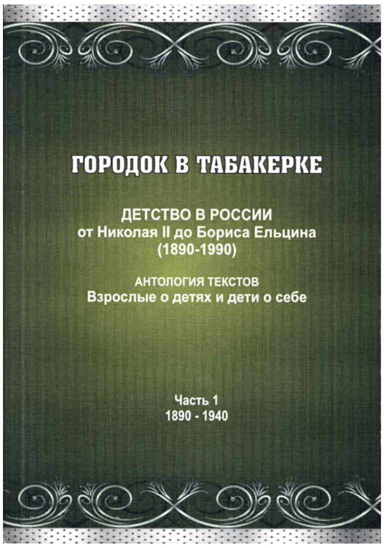
• О плохом поведении гимназистов в манеже. Письмо от Попечителя С-Пб. Учебного Округа г. Директору Введенской гимназии, 20 февр. 1898 г. (с. 63–64);

• Из почтового ящика журнала «Задушевное Слово», 1890 г. (с. 65–67);

• Гранки стенографического отчета 1-го Всероссийского съезда учащихся коммунистов, апрель 1919 г. (с. 165–169);

• *Ульянов А.И.* Воспоминания о периоде 1921–1928 гг. (с. 192–201);

• Автобиография неизвестного мальчика ок. 17 лет, написанная в детприемнике в б. Знаменском монастыре в Москве (с. 267–268);



• Шила в мешке не утаишь. Сочинение ученика 5 класса, 1932 г., г. Москва (с. 356–359);

• Дневник девятиклассника, г. Самара, 1938–1939 гг. (с. 361–386).

Все три выпуска трудов семинара представляются чрезвычайно ценными и заслуживающими внимания не только историков детства и антропологов, но и всех, кто хочет лучше понимать российскую историю и детей прошлого и настоящего.

На сайте семинара «Культура детства: нормы, ценности, практики» (http://childcult.rsuh.ru) можно найти информацию о предстоящих заседаниях, о книжных новинках, о конференциях, а также воспоминания о детстве.

Вернуться к содержанию

О работе семинара учебно-исследовательских работ школьников по математике

НЕТРУСОВА Наталья Михайловна
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
natnetint@gmail.com

СГИБНЕВ Алексей Иванович
учитель математики школы-интерната
«Интеллектуал» г. Москвы
sgibnev@mccme.ru

Первое заседание семинара состоялось *7 октября 2008 г*. Тема заседания: **«Откуда берутся задачи?»**

В своем выступлении ***Г.Б. Шабат*** предложил различать задачи и темы. *Задачи* дает ученику учитель. Задача предполагает правильный ответ (известный учителю). Когда задача решена, ученик ждет от него новую. *Темы* предполагают взаимодействие ученика непосредственно с математикой. Ученик наблюдает предложенные ему объекты, изучает их свойства, вопросы ставит сам.

Г.Б. Шабат предложил развивать *беззадачное обучение.*

Пример темы: «*Число Дидоны*» (младшие классы). Рассказывается история об основании Карфагена. Затем идея решения задачи переносится на многоугольники на клетчатой бумаге (со сторонами вдоль клеток). Строится безразмерное число Дидоны, равное P^2/S (P – периметр, S – площадь) и объявляется конкурс: кто построит многоугольник с самым маленьким числом Дидоны. Дети строят примеры и тренируют интуицию. Постепенно многоугольники становятся все «круглее», а число Дидоны подбирается к абсолютному рекорду – 4π. (Пока что дети понятия о числе π не имеют. Зато в старших классах они легко поймут, какое же число искали!)

Трехмерный аналог этой темы пока не удалось реализовать. (Тут естественно возникает разговор о правильных многогранниках и о том, что их всего пять.)

Другие примеры тем: «Дзета-функция Римана», «Вписывание косой решетки в прямую».

Разумной организацией школьного проекта по математике может быть цепочка:

Профессионал (математик) — Учитель — Ученик.

Профессионал находит в математике подходящие области, из которых черпает темы, идейно богатые и доступные ученику. Учитель реализует эти темы в занятиях с учениками. (Класса до 7–8 можно обходиться и без профессионала, но дальше уже сложно.)

Такую схему Г.Б. Шабату удалось реализовать в сотрудничестве с С.С. Бирюковой (московская гимназия № 1576). *В итоге имела место некоторая деятельность, которая взрослым казалась осмысленной, а детям доставляла удовольствие.*

А.А. Чесноков заметил, что в качестве профессионала может выступать не только «академический» математик, ставящий теоретические задачи, но и прикладник, под руководством которого школьники смогут исследовать известными методами новые объекты.

Д.Э. Шноль рассказал, откуда можно брать задачи.

1. Берем олимпиадную задачу, шевелим по какому-то параметру; в результате выстраивается цепочка вопросов, в которой последние вопросы являются открытыми: «Что можно сказать о...?», а первые (очень простые частные случаи той же конструкции) таковы, что на них можно ответить через 10 секунд. До 7 класса практически с любой олимпиадной задачей можно такое сотворить.

2. Читается математическая книга, журнал «Квант» и т.д., обнаруживаются открытые вопросы, и возникает задача.

Д.Э. Шноль заметил, что когда руководитель не знает, чем закончится работа над задачей, это хорошо: не знаешь — не подсказываешь — лучше руководишь.

Затем докладчик перешел к психологическим аспектам решения исследовательских задач. Работа над исследовательской задачей помогает решить множество психологических проблем школьника. Обычно за такие задачи берутся математически одаренные дети, которые часто бывают аутичными, с социальными проблемами. Такие дети любят понять и бросить, у них нет внутренней установки довести дело до конца, чтобы потом социально презентовать. Для них характерна такая фраза: «Я понял идею, а проверять ее для всех случаев мне скучно». Однако если не приучить в детстве доделывать дело, это грозит серьезными проблемами в дальнейшей жизни. Поэтому важно, чтобы в процессе работы над темой дети писали текст, делали промежуточные отчеты, готовили доклад и т.д.

Работая в классе, мы не знаем, какие процессы происходят в голове у сильного ребенка (например, один шестиклассник отказывался умножать дроби, потому что умножение должно увеличивать число!). А вот работая с ним один на один над исследовательской задачей, мы начинаем лучше чувствовать механизм его мышления и возможные сбои. Очень важна и сама возможность напряженной работы над интересной для школьника темой — ведь сильные ученики справляются с обычной программой без труда и к 11 классу могут так и не научиться серьезно работать.

Публичность докладов также важна. Правда, Д.Э. Шноль ставит под вопрос полезность конференций, на которых распределяют места. Важны не места, а важно, что школьника заинтересованно слушают, — считает докладчик. Если проведение внутришкольной конференции привело к тому, что есть 5 человек, которые с интересом слушают доклады друг друга и задают вопросы, то это уже хороший результат. Возникает сообщество в школе — есть общение между классами; младшие помнят задачи, которые решали старшие, старшие приноравливают доклады к уровню младших.

Само выстраивание доклада позволяет увидеть свою работу со стороны: например, школьнику придется ответить на вопрос, как лучше начинать доклад — с примеров или с общей формулы? На докладе ученик выступает в роли педагога.

Степень новизны задачи не имеет никакого отношения к тому, что происходит. Должно быть удовольствие от процесса!

Примеры работ:

1. «Классификация графиков дробно-квадратичных функций».

Рассмотрим функцию $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$, где в числителе и в знаменателе — многочлены степени не выше второй.

Исследовать, какие типы графиков могут получиться (количество нулей, вертикальных и наклонных асимптот и т.д.).

2. «Шестиугольники с равными сторонами или углами».

Четырехугольник с равными сторонами (ромб) имеет две пары равных углов, четырехугольник с равными углами (прямоугольник) — две пары равных сторон и равные диагонали. Исследовать шестиугольники: а) с равными сторонами; б) с равными углами; в) с равными диагоналями, а также вписанные и описанные шестиугольники с какими-нибудь равными элементами.

А.И. Сгибнев привел примеры того, откуда берутся темы.

1. Из школьных и олимпиадных задач. Например, есть две известные школьные задачи: «Восстановить треугольник по серединам сторон», «Восстановить пятиугольник по серединам сторон». Из них получается тема: «Восстановить многоугольник по серединам сторон; по точкам, делящим стороны в данном отношении». Оказалось, что для нечетноугольников задача всегда разрешима, а для четноугольников появляется необходимое условие, при выполнении которого решений бесконечно много.

2. Из истории математики. В Древнем Египте использовались аликвотные дроби (дроби с числителем 1). Сохранились папирусы с разложениям дробей вида $2/(2n+1)$ в сумму двух аликвотных. Можно (например, с помощью компьютера) отыскать все разложения дроби в сумму двух аликвот, попытаться понять, почему египтяне использовали именно эти доли, определить зависимость количества разложений от вида дроби и т.д.

3. Из статей в научно-популярных журналах. Так, статья *М.Ш. Цаленко* «Периодические последовательности» («Математическое просвещение», № 10 за 2006 г.) принесла две хорошие задачи: найти периоды последовательностей $a_n \equiv n^m (\mathrm{mod}\, k)$ и $b_n \equiv \varphi_n (\mathrm{mod}\, k)$, где φ_n — числа Фибоначчи.

Новые задачи возникают:

1) При переформулировке вопроса. Например, увидев в задаче об аликвотных дробях среднее гармоническое, естественно спросить про среднее арифметическое, геометрическое и квадратичное.

2) При проведении аналогий из других областей. Например, алгебраический аналог геометрической задачи; трехмерный аналог двумерной задачи.

Если задача очень сложна, и ответ не поддается экспериментальному угадыванию, то учитель может разбить ее на кусочки, составить план доказательства. Такой план — хороший способ передачи опыта другому учителю. Если ученик работает самостоятельно, то составление плана доказательства часто является единственной возможностью для него ощутить вкус исследования. Опытный руководитель реализует этот план в форме обсуждений темы с учеником, что может быть более естественно и полезно, чем просто выдача ученику плана. Много таких планов содержится в классических книгах Д. Пойа «Математика и правдоподобные рассуждения» и «Математическое открытие».

Заседание семинара *11 ноября* началось с сообщения ***Г.Б. Шабата* «Как устроена математика “в целом”»**. Докладчик полагает, что с точки зрения исследовательских тем полезно представлять математику в виде структуры, изображенной на рис. 1. Конкретный пример приведен на рис. 2.

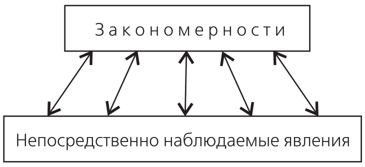


Рис. 1.

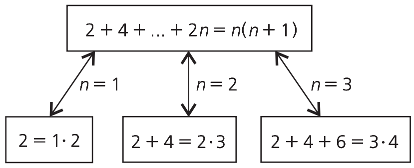


Рис. 2.

Стрелочки называются *линиями специализации*, если двигаться вниз, или *линиями обобщения*, если двигаться вверх. Тогда математическими способностями можно считать умение двигаться по этой структуре вверх. В данном примере можно продолжать движение таким образом:

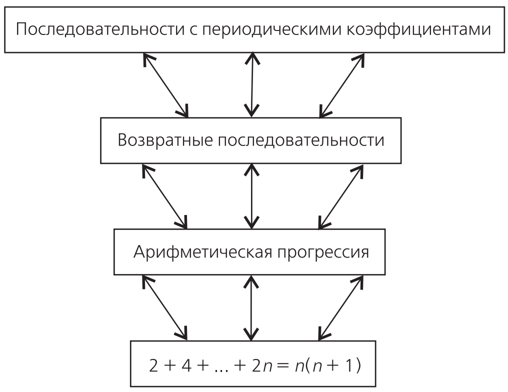


Рис. 3.

Возникают (философские) вопросы: «Связен ли этот граф?», «Есть ли у него “верхняя точка”»?

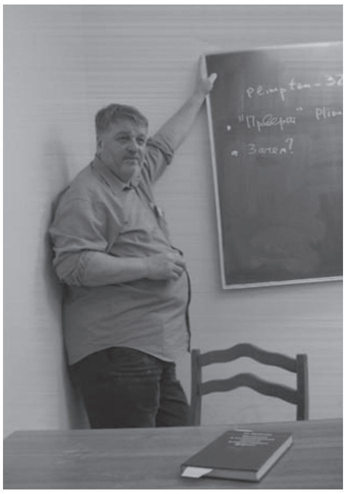
А где же в предлагаемой структуре доказательства? Они здесь не рассматриваются, так как мы исходим из того, что:

1) факты важнее доказательств (самостоятельно наблюдать и подмечать закономерности способен почти любой ребенок, а вот самостоятельно доказывать могут немногие дети);

2) факты часто опережают доказательства (в хорошей учебной теме наблюдение фактов не только приводит к гипотезе, но и помогает найти ее доказательство).

Далее были заслушаны доклады ***К.В. Медведева*** **«Опыт фронтального ведения курсовых работ школьников»** и ***Н.М. Нетрусовой*** **«Организация исследовательской деятельности школьников в школе "Интеллектуал"»** (оба доклада опубликованы в настоящем номере журнала).

На третьем заседании семинара *16 декабря* ***Г.Б. Шабат*** сделал доклад на тему **«Арифметика как источник исследовательских тем для школьников»**. Докладчик рассказал об одном из самых древних математических документов – глиняной табличке «Plimpton 322», которая датируется XXIV–XVII вв. до н.э. (хранится в Колумбийском университете). Эту табличку рассматривает Б.Л. Ван-дер-Варден в своей книге «Пробуждающаяся наука: Математика древнего Египта, Вавилона и Греции» (М.: Физматгиз, 1959, с. 106–108; см. также: http://naturalhistory.narod.ru/Person/Modern/Waerden/Nauka_1/N_1_Ogl.htm).



В этом документе перечислены 15 пифагоровых троек (включая пятизначные!). Существенно, что для практических целей построения прямого угла достаточно одной пифагоровой тройки: 3, 4, 5. Это значит, что поиск других пифагоровых троек мог быть мотивирован чисто математическим интересом.

Табличка «Plimpton 322» позволяет сформулировать несколько исследовательских тем, которые можно предложить школьникам.

Тема 1: Проверка «Plimpton 322» (в табличке есть три ошибки)

Вопросы и задачи, которые можно обсуждать в этой теме:

1. Написать программу, переводящую числа таблички из 60-ричной системы в десятичную. Проверить эти тройки. Найти ошибки.

2. Почему авторы таблички включили в нее именно такие тройки?

3. Продолжить «Plimpton 322»: найти другие тройки (с меньшими или с большими числами).

Тема 2 (гуманитарная)**: Зачем Вавилонянам понадобилась эта табличка?**

Можно сопоставить содержание таблички с другими источниками. Например, со сказанием о Гильгамеше (числа, которые встречаются в тексте: 1, 2, 3, 6, 7, 60, 120). И математические, и литературные памятники содержат обрывки хорошо развитой культуры. Что могло в ней быть? Докладчик отметил, что при работе над этой темой нельзя не привлечь коллег-гуманитариев.

Тема 3: Пифагоровы тройки

В равенстве $a^2 + b^2 = c^2$ сделаем замену: $x = a/c$, $y = b/c$. Получим уравнение $x^2 + y^2 = 1$. То есть задача сводится к поиску рациональных точек на окружности. Множество таких точек всюду плотно, это очень важно осознать.

Проведем семейство прямых через точку $(-1; 0)$: $y = t(x + 1)$.

Подставив это выражение в $x^2 + y^2 = 1$, найдем два решения: $(-1; 0)$ и $\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}; \frac{2t}{1+t^2}\right)$. Первое решение тривиально, второе дает формулы для тангенс-подстановок.

Отсюда получим решения, выраженные через целые параметры m и n:

$a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$, $c = m^2 + n^2$.

Полученные решения в некотором смысле охватывают все множество пифагоровых троек. (Подробнее см.: *Острик В.В., Цфасман М.А.* Алгебраическая геометрия и теория чисел. М.: МЦНМО, 2005.)

Тема 4: Пифагоровы углы

Назовем *пифагоровым углом* острый угол в пифагоровом треугольнике.

Интересно, что сумма пифагоровых углов — пифагоров угол (это нетрудно доказать). Можно попытаться построить классификацию пифагоровых углов.

Тема 5 (приводит к актуальным вопросам современной науки)**: Площади пифагоровых треугольников**

Пусть прямоугольный треугольник имеет рациональные стороны a, b, c, а площадь его равна рациональному числу n. Будем рассматривать такие треугольники с точностью до подобия (т.е. n эквивалентно nk^2, где k — положительное рациональное число).

В каждом классе эквивалентности выделим треугольник с наименьшей *целой* площадью (т.е. n — натуральное число, в разложении которого на простые сомножители нет множителей степени выше первой).

Такие числа n называются *конгруэнтными*.

Задачи.

1. Доказать, что число 1 не является конгруэнтным. Утверждение равносильно тому, что уравнение $x^4 + y^4 = z^4$ неразрешимо в натуральных числах.

2. Доказать, что число n конгруэнтно тогда и только тогда, когда существует арифметическая прогрессия квадратов рациональных чисел с разностью n, т.е. существует рациональное x такое, что $x - n$, x, $x + n$ являются квадратами рациональных чисел.

3. Доказать, что наименьшее конгруэнтное число равно 5 (соответствующий треугольник имеет стороны 9, 40, 41).

4. Перечислить конгруэнтные числа до какого-то (например, до 200) с помощью компьютера. (Подробнее см.: *Острик В.В., Цфасман М.А.* Алгебраическая геометрия и теория чисел. М.: МЦНМО, 2005. Так, на с. 29 указано, что числа 6 и 7 являются конгруэнтными. На с. 33 приводится *критерий Таннелла конгруэнтности* натурального числа, который может существенно облегчить решение задачи 4.)

Тема 6: «Обобщение» Великой теоремы Ферма

Известно, что $x^n + y^n$ не может быть равно z^n (сумма натуральных чисел в одинаковых степенях не может быть равна натуральному числу в той же степени). А если разрешить *разные* степени?

Тогда примеры найдутся: $3^5 + 10^2 = 7^3$ ($243 + 100 = 343$). Задача: отыскать какие-нибудь другие такие числа и степени, что $x^a + y^b = z^c$.

А.И. Сгибнев сделал доклад **«Две исследовательские темы по дискретной математике»**.

Тема 1: Уравнение А.А. Маркова

Уравнение, о котором пойдет речь, – это $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$; его нужно решить в целых числах. Строить работу над темой целесообразно в следующем порядке.

1. Пускаем детей в самостоятельный поиск решений.

2. Упорядочиваем найденные решения: если (x, y, z) – решение, то $(-x, -y, z)$ тоже решение; значит, можно искать только натуральные решения. Также можно упорядочить x, y, z по возрастанию.

3. Заметим, что есть решения, когда два числа из трех совпадают. Назовем их *соседними*. Рассмотрим два соседних решения (x, y, z) и (x, y, z_1). Подставим эти числа в уравнение, получим два тождества. Вычтем одно из другого, тогда $z + z_1 = 3xy$. Тем самым по любому решению (x, y, z) можно найти соседнее решение (x, y, z_1). Поскольку x, y и z можно менять местами, то из одного решения можно получить три соседних.

4. Чтобы двигаться дальше, надо обсудить, как такие ветвящиеся решения записывать. Например, их можно записывать так:

$$\begin{tikzcd}
 & & & (1,1,1) \arrow[d] & & & \\
 & & & (1,1,2) \arrow[d] & & & \\
 & & & (1,2,5) \arrow[dll] \arrow[drr] & & & \\
 & (1,5,13) \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & (2,5,29) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(1,13,34) & & (5,13,194) & & (5,29,433) & & (2,29,169)
\end{tikzcd}$$

....

Построим дерево решений, порождаемых решением (1, 1, 1).

5. Наблюдение: левая ветка (1, x, y) содержит числа Фибоначчи с нечетными номерами: (1, φ_{2n-1}, φ_{2n+1}). Это нетрудно доказать. Вопрос: «Нет ли в других ветках каких-либо обобщенных чисел Фибоначчи?»

6. Вопрос: «Все ли решения порождаются тройкой (1, 1, 1)?» Возможна экспериментальная проверка: найти перебором на компьютере все решения такие, что x, y, $z < 1000$, и посмотреть, все ли они есть в нашем дереве.

7. Вопрос: «Могут ли разные ветви решений пересекаться?»

Доступный школьникам разбор темы с ответами на вопросы 6 и 7 см. в статье: *Крейн М.Г.* Диофантово уравнение А.А. Маркова // Квант. 1985. № 4. (http://kvant.mirror1.mccme.ru/1985/04/diofantovo_uravnenie_aamarkova.htm)

Там же формулируется обобщение темы.

Тема 2: Игра «Клетки на полоске»

Бесконечная в обе стороны полоса клетчатой бумаги состоит из черных и белых клеток. Каждую секунду клетка, имеющая четное число черных соседей, становится белой, а имеющая нечетное число черных соседей – черной. Изучить эволюцию узоров. (Тема взята с сайта исследовательского семинара для старшеклассников Белорусского государственного университета: http://www.uni.bsu.by/arrangements/psem/pr2.html.) Игру можно рассматривать также на конечной полосе, на кольце, в прямоугольнике и т.д.

Полезно вначале дать детям «повариться» в теме некоторое время, а затем разработать с ними план исследования. Например, на кольце можно методично изучать эволюции всех возможных узоров: начиная с длины 1 и до длины 10, скажем. По ходу изучения будет выясняться, что многие разные на вид узоры на самом деле эквивалентны. Встанет вопрос: «Как быть уверенными, что ничего не пропустили?» Придется осуществить упорядоченный перебор и т.д. По ходу наблюдений начнут открываться и нетривиальные закономерности:

1) в кольце бывает либо цикл, либо все кольцо становится белым;

2) если в конечной полосе длиной 3, 7, 15, ..., 2^{n-1} в начале всего одна черная клетка, то рано или поздно вся полоска станет белой;

3) эволюция суммы является суммой эволюций (т.е. если ввести операцию бинарного суммирования черное + черное = белое и т.д., разбить полоску на две (сумма которых дает исходную), проэволюционировать их по отдельности и просуммировать, то получится эволюция исходной полоски).

После четкой формулировки гипотезы следует попытаться доказать ее или опровергнуть.

Возможные дальнейшие вопросы.

1. Если зашифровать узор в виде двоичного числа, как это число будет эволюционировать?

2. Найдите узоры, которые периодически повторяются со временем. Какими свойствами они обладают? Что можно сказать о полосе произвольной ширины? О всей клетчатой плоскости?

Н.М. Нетрусова сделала доклад **«Две исследовательские темы по геометрии».**

Тема 1: Конструирование геометрических мест точек (5–7 классы)

Коза пасется на лугу и выедает всю траву, до которой может дотянуться. Как с помощью колышков и веревок привязать козу на лугу, чтобы выеденная ею трава образовала форму: а) круга; б) овала (см. рис. 4); в) фигуры, образованной двумя соединенными дугами окружностей (см. рис. 5); г) полукруга?

Рис. 4.

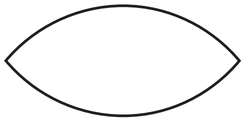


Рис. 5.

Можно ли так привязать козу, чтобы она выела траву в виде: а) квадрата; б) шестиугольника; в) треугольника?

Изменятся ли решения приведенных задач, если веревку нельзя резать, но можно как угодно привязывать?

Примечание. Никаких заборов и преград использовать нельзя, через веревки коза умеет перепрыгивать.

Тема 2: Разбиение многоугольника на равновеликие треугольники (8–9 классы)

1. Возьмем внутри треугольника точку M, соединим отрезками с вершинами, получатся три треугольника. Могут ли они быть равновелики? Это известная задача: *могут, если М — точка пересечения медиан.*

2. Есть ли другие такие точки?

3. В любом ли четырехугольнике найдется такая точка? *Нет, не в любом.*

4. Как описать все четырехугольники, в которых такая точка найдется, и как ее построить?

5. Аналогичная задача для пятиугольников и т.д.

Вернуться к содержанию

Информация

Семинар учебно-исследовательских работ школьников по математике

Начал свою работу семинар, посвященный работам школьников по математике. Планируется два вида заседаний:

1) **доклады школьников** 5–11-х классов (работы будут группироваться по возрасту докладчиков и сложности);

2) **семинары для учителей** с обзорами тем, обсуждением задач и литературы.

Работы школьников. От работ школьников НЕ требуется новизна результатов. Требуется самостоятельное решение сложной (для школьника) исследовательской задачи. (Роль руководителя состоит в постановке задачи, консультировании школьника по теме, помощи в выборе литературы, но не решении задачи за школьника!) В спокойной дружественной обстановке будет обсуждаться работа, ее результаты, процесс решения (приветствуются комментарии научного руководителя). Будут даваться советы по продолжению работы, усилению результатов, смежным задачам и т.д., а также по подготовке доклада для школьной или еще какой-то конференции.

Семинар НЕ ставит целью ранжирование работ и выявление лучших. Активные участники будут награждаться научной литературой. Мы будем рады, если после семинара школьник выставит свою работу на одну из конференций исследовательских работ.

Приглашаем в качестве слушателей тех школьников, которые интересуются математикой, но пока не имеют своих работ!

Семинары для учителей. На этих семинарах планируются круглые столы и доклады педагогов и ученых об их опыте руководства работами школьников, методах работы, задачах, темах и т.д. Приглашаются также учителя, которые хотели бы решать со школьниками исследовательские задачи, но еще не знают, как это делать.

Предполагаемые темы для обсуждений:

1) «Разбор тем, их связи с наукой»;

2) «Как организовать конференцию?»;

3) «Исследовательские задачи и учеба»;

4) «Роль технических средств и компьютерных экспериментов»;

5) «Работа учеников с литературой и Интернетом»;

6) «Исследовательские задачи и олимпиады: сравнение соревновательной составляющей».

Заседания семинара проводятся 1 раз в месяц по вторникам, в 19.00, в Московском центре непрерывного математического образования, ауд. 209. (Адрес и схему проезда см. на сайте центра: http://www.mccme.ru/head/address.html.)

Заявки на доклады и вопросы присылайте секретарю семинара ***Сгибневу Алексею Ивановичу*** по электронному адресу sgibnev@mccme.ru.

Информацию о прошедших и грядущих заседаниях семинара см. на сайте: http://www.etudes.ru/ru/forums/forum.php?id=25.

Конференция в Российском университете дружбы народов

23–27 марта 2009 г. в Российском университете дружбы народов (РУДН) пройдет Международная научно-образовательная конференция «Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования».

В рамках конференции планируется работа следующих секций:

- Научные исследования в области математики в вузах;
- Прикладные задачи математики;
- Научные исследования в области физики в вузах;
- Проблемы высшего профессионального образования;
- Актуальные проблемы школьного образования;
- История математики и естествознания;
- Проблемы среднего профессионального образования;
- Проблемы воспитания молодежи;
- Информационные технологии в образовании.

Рабочие языки конференции – русский и английский.

К началу работы конференции предполагается издание тезисов докладов конференции.

Подача заявки на участие в конференции

Уважаемые коллеги! Для участия в конференции необходимо в срок **до 30 января 2009 г.** выслать по электронной почте регистрационную форму участника конференции и тезисы доклада в объеме до 2-х страниц, а пленарных докладов – до 10 страниц в формате Word или TeX на один из электронных адресов Оргкомитета: srovanova@mail.ru, csonew@mail.ru. Материалы могут быть представлены в Оргкомитет и на электронном носителе по адресу:

117198, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, ком. 240а, Центр современного образования, тел. +7(495)4332118 или 8 903 581 02 41.

ВНИМАНИЕ! Будут рассмотрены только те тезисы, авторы которых выслали регистрационную форму участника конференции.

Оргвзнос в размере 2000 рублей вносится до 15 февраля 2009 г. на расчетный счет Центра современного образования или по адресу: 117198, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, ком. 240а с указанием назначения платежа: организационный взнос для участия в конференции «Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования» от ФИО. Оргвзнос в размере 2500 рублей можно также внести по прибытии на конференцию.

Условия заочного участия в конференции: 1200 рублей до 15 февраля 2009 г. на расчетный счет Центра современного образования или по адресу: 117198, Россия, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6, ком. 240а с указанием назначения платежа: организационный взнос для публикации тезисов конференции «Наука в вузах: математика, физика, информатика. Проблемы высшего и среднего профессионального образования» от ФИО.

Банковские реквизиты
Центр современного образования (ЦСО),
117302, Москва, ул. Орджоникидзе, 3,
ИНН/КПП 7725066932 /772501001,
р/с 40703810938280100652,
Донское отделение №7813/01545
Сбербанка России г. Москвы,
к/с 30101810400000000225,
БИК 044525225 , ОКВЭД 80.30.3, ОКПО 40225269.

Просим информировать Оргкомитет о необходимости в гостинице. Стоимость проживания в гостинице РУДН планируется в следующем размере: место в двухместном номере 900 руб., одноместные номера 1800 руб.

Информация о конференции будет размещаться на сайте Научно-методического совета по математике Минобрнауки России: http://foroff.phys.msu.ru/math/, там же можно найти полный вариант информационного письма.

Конференция в Тольяттинском государственном университете

21–24 апреля 2009 г. в Тольяттинском государственном университете пройдет IV Международная научная конференция «Математика. Образование. Культура».

В рамках конференции планируются различные секции по следующим основным направлениям:

- Математические исследования (алгебра, геометрия, топология, теория чисел, логика, функциональный анализ, теория вероятностей, математическая физика и др.);
- Мировоззренческие и культурные аспекты математики;
- История и философия математики и математического образования;
- Дифференциация математического образования;

- Прикладная математика и информатика, математическое моделирование;
- Содержание и методика преподавания математических курсов;
- Информационные технологии в математическом образовании;

В рамках конференции запланирован круглый стол «Подготовка учителя математики в условиях двухуровневой системы обучения (бакалавриат и магистратура)».

Для участия в конференции необходимо **до 28 февраля 2009 г.** представить в Оргкомитет заявку, текст статьи – до 6 страниц на русском или английском языке (переслать электронной почтой) и оплатить оргвзнос в размере 1180 рублей (в т.ч. 18% НДС). К началу конференции будут изданы программа и сборники научных трудов: Часть 1. «Математика и ее приложения». Часть 2. «Математическое образование: содержание, методики и технологии».

Платежные реквизиты

ГОУ ВПО «Тольяттинский государственный университет», Адрес: 445667, г. Тольятти, ул. Белорусская, 14.

ИНН 6320013673 КПП 632001001 УФК по Самарской области
(4215, ТГУ, л/счет 03421189780)

р/счет 40503810100001000006 в ГРКЦ ГУ БАНКА РОССИИ ПО САМАРСКОЙ ОБЛ. Г. САМАРА

БИК 043601001; ОКПО 55914968; ОКВЭД 80.30.1; ОГРН 1036300997567

В назначении платежа обязательно указывайте:

07330201010010000130 п.1 р.0732068406 от 30.03.05 оплата (фамилия) за участие в конф. «Математика. Образование. Культура»

НДС указывайте отдельной строкой (18 % – 180 рублей).

Правила оформления статей

В редакторе Word for Windows. Формат: размер листа А4, поля: левое – 25 мм, правое – 25 мм, верхнее и нижнее по 25 мм, шрифт Times New Roman, 14 пт, межстрочный интервал – одинарный. Название доклада прописными буквами, фамилия с инициалами (Иванов И.И.), координаты (место работы полностью, страна, индекс, адрес (рабочий или домашний), телефон (рабочий или домашний), факс, e-mail). Все выравнивается по центру, заголовок и фамилия выделены полужирным шрифтом. Между заголовком, ФИО и координатами пропуски в 1 строку, между координатами и текстом – 2 строки. Текст выравнивается по ширине. Аннотация на английском языке (3–10 строк) помещается перед текстом статьи. Литература набирается в алфавитном порядке, 12 размером шрифта.

Правила оформления также см. здесь:
http://www.e-conference.ru/modules.php?name=News&file=print&sid=4096.

Научный руководитель конференции

Утеева Роза Азербаевна – д.п.н., зав. кафедрой алгебры и геометрии ТГУ; тел.: (848-2) 53-91-13, 22-84-81; факс: 22-95-22; e-mail: R.Uteeva@tltsu.ru.

◀ Вернуться к содержанию