Красноярская Летняя Школа 2001года

Двойная последовательность.

Баранова Мария, Бочкова Юлия, Евсевская Наталья, Карпова Евгения, Полынцев Александр, Прокопьева Татьяна

Консультант: Вера Золотарская

Постановка задачи.

Для какого n можно выписать 2n чисел: {1,1,2,2, … ,n-1, n-1, n, n} в ряд так, чтобы между единичками было расстояние 1, между двойками – 2, между тройками – 3 и т. д.?

Пример правильной расстановки для n=4: **41134232**.

Пример неправильной расстановки n=6: **4<u>22</u>645113653** (между двойками расстояние один).

Результаты экспериментов.

Мы рассмотрим все числа n от 1до 35. При n =1, очевидно, решение есть.

При n =2, очевидно, решения нет. Между двойками должно быть свободное место, а единицы нельзя разъединить и поэтому между двойками их не поставишь 11**<u>2</u>**?**<u>2</u>**11.

В случае для n=3, последовательность у нас не также получится. Действительно, между тройками должно быть ровно два места. Посмотрим, какие числа можно поставить между тройками. Это может быть:

а) 3223

б) 3123

в) 3113

Очевидно, случай а) невозможен, так как между двойками должно быть пустое место. Случай б) тоже невозможен, так как единички должны стоять рядом. Наконец, случай в) невозможен, так как двойки снаружи будут стоять рядом.

<u>Мы рассматривали все числа (до 35) и для всех случаев у нас получается, что последовательность длины 2 можно построить, если такое уравнение: x1=4K x2=4K+1.</u>

<u>Для случаев 4 и 5 последовательности получились, а для 6 и 7 – нет, то ес3ть для 4K+2 или 4K+3 нет решений для нашей задачи.</u>

Возьмем две единицы (1 1), они должны находится всегда рядом, то есть, между ними нет свободных мест, куда можно поставить другие числа. Если рассмотреть две двойки, то мы увидим, что между ними есть одно пустое место (2 . 2), куда можно поставить любое число.

Тем самым, от единицы до двойки есть одно свободное место. Между тройками – два места (3 . . 3), куда мы можем поставить, например, единицы, тогда от единицы до тройки три свободных места.

Рассматривая четверки, мы видим, что между ними три свободных места, суммируя с предыдущими местами, получаем шесть свободных мест от единицы до четверки, и так далее суммируя предыдущие места с местами, которые есть между числами, мы получаем:

11 – нет свободных мест
2 . 2 – одно свободное место
3 . . 3 – два + одно = три свободных места.
4 . . . 4 – три + три = шесть свободных мест.
5 . . . . 5 – четыре + шесть = десять свободных мест.
6 . . . . .6 – пять + десять = пятнадцать свободных мест.
7 . . . . . . 7 – шесть + пятнадцать = двадцать одно свободных мест.
8 . . . . 8 - двадцать восемь свободных мест.
9 . . . . 9 - тридцать шесть свободных мест.
10 . . . . 10 - сорок пять свободных мест.
11 . . . . 11 - пятьдесят пять свободных мест.
12 . . . . 12 - шестьдесят шесть свободных мест.
13 . . . . 13 - семьдесят восемь свободных мест.

Но места, например, между девятками, могут совпадать с местами между четверками (9 . . 4 . . . 4 . . 9), так что мы берем общую сумму свободных мест между числами. Количество свободных мест получается либо четным числом, либо нечетным, например, от единицы до тройки три свободных места, а от единицы до четверки шесть свободных мест, и так далее. Изучая наши последовательности, мы заметили, что с числами, у которых количество свободных мест является четным числом, мы можем поставить последовательность, например, с четверками у которых от единицы получается шесть свободных мест, шесть является четным числом, у нас получаются последовательности, одна из них 42324311. А с шестерками, количество свободных мест от единицы которые ровняются пятнадцати, а пятнадцать нечетное число, мы не можем составить последовательности 642 . 2463113, так как у нас остается пустое место, чего не должно быть.

Алгоритм двойной последовательности.

Для того, чтобы составить последовательность чисел по алгоритму, нужно расставлять числа, начиная с самого большого в порядке убывания через одно место, так что с другой стороны эти числа будут стоять подряд (то есть между ними не должно быть пустых мест.)

Для примера возьмем последовательность для пяти.

1) 5 5
2) 5 . 4 . . 5 4
3) 5 . 4 . 3 5 4 3

В оставшиеся пустые места вписываем четные числа, в нашем случае двойки:

5 <u>2</u> 4 <u>2</u> 3 5 4 3

Единицы мы можем поставить как слева, так и справа. Это не имеет значения, так как между единицами не должно быть свободных мест. В результате имеем последовательность для пяти:

1 1 5 2 4 2 3 5 4 3

Для остальных случаев мы действуем следующим образом:

1. Расставляем числа в порядке убывания, начиная с самого большого через место.
   Пример: число 16
   16 . 15 . 14 . 13 . 12 . 11 . 10 . 9 . 16 15 14 13 12 11 10 9
2. Слева расставляем четные числа на свободные места.
   16 <u>2</u> 15 <u>2</u> 14 <u>6</u> 13 <u>8</u> 12 <u>4</u> 11 <u>6</u> 10 <u>4</u> 9 <u>8</u> 16….
3. Справа расставляем оставшиеся нечетные числа, начиная с самого большого в порядке убывания:
   16 2 15 2 14 6 13 8 12 4 11 6 10 4 9 8 16 7 5 3 1 1 3 5 7.

В результате в правой части числа сначала убывают, а затем симметрично возрастают.

Красноярская Летняя Школа 2001года

Игра «НИМ»

Андрей Байбурин, Андрей Ильдяков, Павел Смаль, Маша Орлова, Саша Хорец

Консультант: М.А.Ройтберг

1. Постановка задачи.

В игре «НИМ» играют двое. Есть несколько кучек с камнями. За один ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучки. Выигрывает тот игрок, который возьмет камни последним. Требуется разработать стратегию игры в НИМ.

Как обычно, выработка стратегии состоит в изучении позиций, проигрышных для ходящего. Для случая одной кучки (NK =1), очевидно, любая позиция является выигрышной. Для случая двух кучек проигрышными являются симметричные позиции. Ниже мы изучаем случай 3-х кучек. Следующее утверждение очевидно.

Утверждение 1. Позиция (a, b, c) является проигрышной тогда и только тогда, когда ни для какого x ни одна из позиций вида (a-x, b, c) (a, b-x, c) (a, b, c-x) не является проигрышной.

Ниже для позиции (a, b, c) мы всюду считаем, что a < b < c.

2. Простейшие частные случаи.

Утверждение 2.

1. Среди позиций вида (1, x, y) проигрышными являются позиции вида

   1, 2n, 2n+1

и только они (n >=1).

2. Среди позиций вида (2, x, y) проигрышными являются позиции вида

   2, 4n, 4n+2

   2, 4n+1, 4n+3

и только они (n >=1).

Доказательство проводится методом математической индукции.

3. Таблица проигрышных позиций.

Множество проигрышных позиций удобно представлять в виде таблицы, строки и столбцы которой занумерованы натуральными числами. Проигрышная позиция (a, b, c) изображается числом a, проставленным в клетки (b, c) и (c, b). На диагонали стоят нули, т.к. позиции вида (0, b, b) – проигрышные.

Утверждение 3.

1. Ни в каком столбце не стоят 2 одинаковых числа.
2. Ни в какой строке не стоят 2 одинаковых числа.
3. В каждой клетке стоит не более 1 числа.
4. Если в b-й строке есть число в столбце c, то число b не может появиться ни в столбце c, ни в строке c.

Доказательство – следует их утв.1. Докажем, например, утверждение 4. Если на пересечении b-й строки и столбца c стоит некоторое число a, то позиция (a, b, c) проигрышная. Если число b появилось в строке c (случай столбца c рассматривается аналогично), то есть проигрышная позиция (b, c, t), где t > b >a. Но в этом случае из (b, c, t) за один ход можно получить проигрышную позицию (b, c, a) = (a, b, c), т.е. (b, c, t) вопреки предположению не является проигрышным. Противоречие.

На утверждении 3 основан следующий способ построения таблицы 1.

1. Проставим 0 в клетки на диагонали и 1 в клетки вида (1, 2n, 2n+1).
2. Заполняем поочередно все клетки, соответствующие проигрышным позициям вида (2, x, y), (3, x, y), и т,д,
   При заполнении мы просматриваем таблицу сверху вниз.
3. Пусть мы анализируем позиции с первым числом k и (a) в очередной строке s нет числа k (оно могло появиться, если есть проигрышная позиция (k, t, s), где t <s); (b) клетка (k, s) пустая. Пусть t – наименьшее число большее s, для которого в t-м столбце нет числа k выше строки s и клетка (s, t) – пустая. Тогда позиция (k, s, t) – проигрышная и следует проставить число k в клетки (s, t) и (t, s).

Корректность метода следует из утверждений 1, 3.

3. **Общий вид таблицы.**

Наш анализ показал, что заполненные клетки в Таблице образуют серию квадратов со стороной $2^{л+1}$), где n = 0, 1, ... – номер квадрата по порядку. Каждый из квадратов начинается в клетке ($2^{л+1,}$ $2^{л+1)}$ и заканчивается в клетке ($2^{л+2}$-1, , $2^{л+2}$-1) В каждой строке и каждом столбце квадрата по одному разу встречаются все числа от 1 до $2^{л+1}$-1. Это утверждение может быть доказано методом математической индукции.

4. **Как пользоваться таблицей, чтобы выиграть.**

Пусть дана позиция (a, b, c). Если есть два одинаковых числа, то …

Пусть a<b<c. Рассмотрим среднее число b.

1. Найдем такое R, что
   2^{k+1}<=b<2^{k+2}-1
2. Рассмотрим отдельно два случая: (1) a до k-ого квадрата; (2) a в k-ом квадрате
   2.1. a<2^{k+1}, т.е. строка не лежит в k-ом квадрате, тогда по лемме Ш, в строке есть клетка в которой стоит число a. Пусть эта клетка находится в столбце t. Тогда позиция (a, b, t) – проигрышная. Если t=c, то позиция (a, b, c) проигрышная, в противном случае позиция выигрышная. Если c>t, то правильный ход взять c-t камней из кучки c с камнями, т.е. (a, b, c) -> (a, b, t). Пусть c<t. По условию c>b, т.е. c<b<t. Но b и t лежат в одном квадрате. Значит c лежит в том же квадрате. Рассмотрим клетку (b,c). Пусть t число в этой клетке. Если t<a, то павильный ход (a, b, c) -> (t, b, c).
   Пример. (4, 13, 14) если t=a, то позиция (a, b, c) проигрышная.
   Пусть a>t, например (2, 13, 14), тогда если слева в строке или выше в столбце найдется число a - ! иначе мы бы в клетку (b, c) поставили бы a, а не t! Пусть, например a нашлось выше клетки (b, c) – в клетке (d, c). Например для случая (2,13,14) d=12. Тогда правильный ход (a, b, c) -> (a, d, c)
   2.2. Пусть 2^{k+1}<=a<b<2^{k+2}, т.е. a и b лежат в одном квадрате. Тогда c_1 находится на пересечении a и b меньше, чем c.
   Пример. Известно, что c>a. Так же известно, что координата начала квадрата k – это 2^{k+1}, наибольшее число в этом квадрате 2^{k+2}-1, т.е. на 1 меньше, поэтому c_1<a<c. Значит c можно привести к c_1.
   Пример. 70(c), 24(a), 25(b) => 2(c_1), 24(a), 25(b)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	0																													
2		0	1																											
3		1	0																											
4				0	1	2	3																							
5				1	0	3	2																							
6				2	3	0	1																							
7				3	2	1	0																							
8								0	1	2	3	4	5	6	7															
9								1	0	3	2	5	4	7	6															
10								2	3	0	1	6	7	4	5															
11								3	2	1	0	7	6	5	4															
12								4	5	6	7	0	1	2	3															
13								5	4	7	6	1	0	3	2															
14								6	7	4	5	2	3	0	1															
15								7	6	5	4	3	2	1	0															
16																0	1	2	3	4	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
17																1	0	3	2	5	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
18																		0	1	6	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13
19																			0	7	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12
20																				0	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11
21																					3	2	13	12	15	14	9	8	11	10
22																					0	1	14	15	12	13	10	11	8	9
23																						0	15	14	13	12	11	10	9	8
24																							0	1	2	3	4	5	6	7
25																								0	3	2	5	4	7	6
26																									0	1	6	7	4	5
27																										0	7	6	5	4
28																											0	1	2	3
29																												0	3	2
30																													0	1
31																														0
32																														

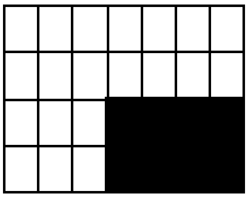
Красноярская Летняя Школа 2001года

Фонарики

Катя Веселкова, Дмитрий Мусиенко, Артем Буш

Консультанты: Диана Шамсутдинова, Юра Вольвовский

Условия игры

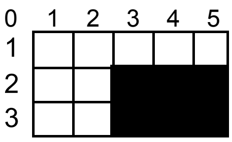


Играют двое на прямоугольном поле m*n клеток. Ходящий ставит «фонари» в узлы клеток при этом освещается область прямоугольника вправо и вниз от фонаря. Ходящий не имеет права ставить «фонарь» на правую и нижнюю сторону прямоугольника, а также освященную область. Проигрывает тот кто первым закрасит последнюю клетку.

Цель проекта – найти правильную стратегию игры и узнать кто при этом выигрывает.

Стратегия игры:

Введем понятие о цвете фигуры (не обязательно прямоугольника). Фигура будет называться черной, если при любом ходе ходящий проигрывает, то есть существует выигрышная стратегия для второго игрока. Фигура будет называться белой , если при правильной стратегии **ходящий выигрывает.**



Так же введем координаты узлов клеток, куда можно поставить «фонари». Верхний левый узел будет точкой (0,0). Сначала будет называться координата по вертикали, а потом по горизонтали. Например, на рисунке узел, где стоит «фонарь» (1,2).

Докажем, что для любой фигуры можно определить ее цвет, то есть определить выигрышная она или проигрышная. Докажем методом математической индукции. Пусть для всех фигур площадью меньше либо равной S можно определить цвет. Рассмотрим фигуру площадью S+1. Как бы мы не ставили «фонарь» площадь новой фигуры будет меньше либо равной S, то есть для нее будет определен цвет. Следовательно и для исходной фигуры будет определен цвет.

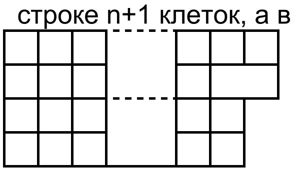
Рассмотрим простейший случай 1*1. Понятно, что эта фигура

черная. Теперь рассмотрим случай 1*n, где n>1. Эта фигура будет белой, так как одним ходом, приводится к проигрышной ситуации для второго игрока.

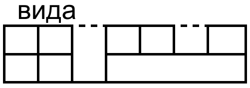
Теперь рассмотрим фигуры вида 2*n . Сначала рассмотрим простейшие случаи:

1) Фигура 2*1 является выигрышной, поскольку является отображением фигуры 1*2.
2) Фигура является проигрышной, если любым ходом ходящий приводит её в выигрышную ситуацию.
3) Эта фигура белая, если одним ходом переходит в чёрную.
4) Всё фигуры размером 2*n и оканчивающиеся на уголок являются чёрными.

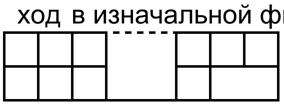
Докажем 4) методом математической индукции. Пусть все фигурки, у которых в верхней строке n+1 клеток, а в



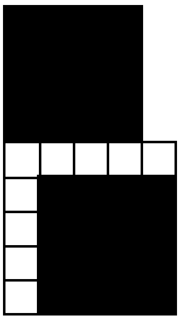
нижней n – черные. Докажем, что фигура (n+2)*(n+1) – черная. Если мы будем ходить в узлы (0, k), где k меньше либо равно n+1, то будут получаться прямоугольники 2*k. Тогда второй игрок одним ходом (1, k-1) приводит к черной фигуре (по предположению индукции). Отсюда следует, что прямоугольник вида 2*k – белая, а в исходной фигуре такой ход проигрышный. Если ходить в узел (1, m), где m меньше либо равно n, то получается фигура вида



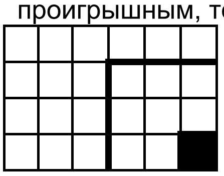
. Тогда второй игрок ходом (0, m+1) приводит к черной фигуре (по предположению индукции). Следовательно, фигуры вида n*m, где m меньше либо равно n-2 – белые. Отсюда ход в изначальной фигуре проигрышный. Получается, что все ходы в фигуре вида



проигрышные, следовательно, она черная.



Рассмотрим уголок, у которого ширина и длина одинакова. Тогда как бы первый игрок не ходил, второй ходит симметрично и выигрывает, следовательно такой уголок черный. Теперь рассмотрим квадрат. Первый игрок ходит в узел (1,1) и остается уголок, который является проигрышным, то есть квадрат – белая фигура.



Теперь рассмотрим прямоугольник m*n. Докажем, что он белый. Предположим, что квадрат – черная фигура и у противника существует выигрышная стратегия. Тогда как бы мы не походили противник выиграет. Походим в узел (m-1, n-1). Тогда второй игрок в соответствии со своей стратегией походит в какой-то узел (a, b). Но тогда мы первым ходом могли походить в этот узел и выиграть. Получилось противоречие, следовательно предположение неверно и прямоугольник белая фигура.

Рассмотрим фигуры шириной 3 клетки. Будем разбирать частные случаи. Фигуры шириной 3 и длиной 2 являются отображениями фигур шириной 2 и длиной 3. Фигуры шириной и длиной

3 являются выигрышными за исключением уголка. Среди фигур шириной 3 и длиной 4 проигрышной является только

Красноярская Летняя Школа 2001года

Поиск чисел с заданным количеством делителей

Артемьева Света, Вопилова Ира, Герасина Оля

Консультант: Антон Борисюк

1. Постановка задачи

Наш проект состоял в исследовании зависимости между натуральным числом и количеством его делителей. Перед нами стояло несколько задач.

1. Определить количество делителей заданного натурального числа.
2. Найти числа с фиксированным количеством делителей.
3. Доказать, что найдены все числа с заданным количеством делителей.

2. Нахождение количества делителей числа А.

Напоминание. Любое натуральное число может быть разложено на простые множители $A = p_1^{k_1} * p_2^{k_2} * \dots * p_s^{k_s}$, где p_i – простые числа, $k_i>0$. Это разложение единственно с точностью до перестановки множителей**.**

Утверждение 1. Число делителей N(A) натурального числа $A = p_1^{k_1} * p_2^{k_2} * \dots * p_s^{k_s}$ вычисляется по формуле $N(A)=(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_s+1)$.

Доказательство:

Есть число А вида: $A = p_1^{k_1} * p_2^{k_2} * \dots * p_s^{k_s}$ (смотри напоминание). Делители числа А имеют вид $p_1^{m_1} * p_2^{m_2} * \dots * p_s^{m_s}$,, где $0 \le m_i \le k_i$ (m_i может принимать k_i+1 значение). Показатели степени для $p_1,p_2\dots p_s$ можно выбирать независимо, следовательно количество делителей А равно произведению числа делителей каждого простого множителя А, т.е. равно $(k_1+1)(k_2+1)\dots(k_n+1)$.

Пример:

Найдем количество делителей числа 180.

1) Разложим это число на простые множители: $180 = 2*2*3*3*5 = 2^2*3^2*5$
2) Найдем число делителей

$N(180) = (2+1)(2+1)(1+2) = 18.$

3. Числа с наперед заданным количеством делителей.

Утверждение 2.

Если число А имеет n делителей, где n – простое, то оно представляется в виде p^{n-1}, где p – любое простое число.

Доказательство:
Число А = $p^к$.
У числа $p^к$ - (к+1) делитель. Тогда n = k+1
k = n-1 ⇒ A = p^{n-1}.

Пример:
Пусть число имеет 13 делителей. Тогда его можно представить в виде p^{12}, где p – любое простое число. Например, числа 2^{12}, 3^{12}, 5^{12} имеют по 13 делителей.

Утверждение 3 (частный случай)

Если число имеет n^2 делителей, то оно будет представимо в виде $p^{n-1} q^{n-1}$, где p и q – простые числа.

Доказательство:

Пусть $p^k q^k$ имеет n^2 делителей. Число $p^к$ имеет (к+1) делителей, т.к. { 1, p^1, p^2…$p^к$}.
Число $p^k q^k$ имеет (к+1) (к+1) делителей, тогда n^2 = (к+1) (к+1) ⇒ k = n-1.
Значит, если количество делителей равно n^2 , то число представляется в виде $p^{n-1} q^{n-1}$.

Пример:
Пусть число имеет 25 делителей. Тогда его можно представить в виде p^4q^4. Например, число $2^4 3^4$ имеет 25 делителей.

Утверждение 4

Если количество делителей n^m , то число с таким количеством делителей можно записать в виде $p_1^{n-1} * p_2^{m-1} * \dots * p_s^{m-1}$.

Доказательство:

Число $p^к$ имеет (к+1) делителей,
n^m=$p^к$…$p^к$.Тогда $(к+1)^m$ = n^m
к = n-1 ⇒ n^m = $p_1^{n-1} * p_2^{m-1} * \dots * p_s^{m-1}$.
Пример:

Пусть число имеет 3^4 делителей. Тогда оно будет представимо в виде $p^2 p^2 p^2$ p^2 .

Числа, имеющие ровно n делителей.

Утверждение 5.

Пусть $n=k_1k_2 \ldots k_s$ (k_i – натуральное число) есть число делителей. Тогда ровно n делителей будут иметь все числа вида $p_1^{\text{л}_1-1} * p_2^{\text{л}_2-1} * \cdots * p_s^{\text{л}_\text{ы}-1}$.

Красноярская Летняя Школа 2001года

Умножение остатков

Вопилов Юрий, Чугунов Дмитрий

Консультант: Антон Борисюк

Содержание

1.**Введение.**

Занимаясь данным проектом, мы работали с числами, которые при делении на заданное число n, которое в дальнейшем будет именоваться порядком таблицы или модулем. Работая с ними мы пробовали искать различные закономерности, часть которых будет упомянута ниже, с приведенными доказательствами.

1.1.Основные понятия:

Деление с остатком выражается формулой:

a=bk+r, где a-делимое, b – делитель, k- частное, r- остаток, при чем 0 r b

a=b(mod k) означает, что числа a и b дают равные остатки. Читается: a сравнимо с b по модулю k.

2.Основная часть

2.1.Работа с таблицами умножения на остатки

2.1.1.Составив таблицы различных порядков(см. рис.) , мы заметили, чтов них присутствуют две симметрии – относительно двух диагоналей таблицы.

7	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Симметрию, относительно диагонали AB описать нетрудно: это объясняется тем, что ab=ba.

Симметрию же относительно диагонали CD рассмотрим поподробнее. Привяжем ее к системе координат.

Выберем две точки (симметричные относительно данной прямой). Координаты точек А и В: А(x_0,y_0), В(y_0,x_0). Координата точки А по оси Абсцисс будет равна выбранному остатку, в следствие того, что таблица не искажается по ОХ. А координаты точки В по оси ординат будет выражаться так:
y_0=k-b_0, где k порядок таблицы, а b0 выбранный остаток, т.к. измерение по оси ОУ идет вверх, а в таблице – вниз.

Чтобы числа были одинаковы относительно диагонали CD, надо, чтобы
$x_0(k-y_0)=y_0(k-x_0)(\mathrm{mod}\ k)$
$X_0k-y_0x_0=y_0k-x_0y_0$
Т.К. x_0k и y_0k делятся на k, следовательно, $x_0y_0=x_0y_0(\mathrm{mod}\ k)$ верное утверждение.

2.1.3.Делители нуля

Здесь мы попробуем выяснить, когда появляются(не появляются) в таблицах нули.
Во-первых, нули в таблице появляются в тех случаях, когда произведение чисел a и b делится на n, то есть ab=kn, где k – целое число, а n – натуральное.

Рассмотрим первый случай появления нулей:

Пусть n –порядок таблицы, число натуральное, для которого возможно единственное разложение на простые множители.

Тогда $n=p_1 * p_2 * \ldots * p_n^k$

ab=nk(случай появления нулей)

Тогда

При чем числа $p_1 \ldots p_n$ могут иметь различные комбинации степеней, входящих в разложение на множители числа n.

Рассмотрим второй случай:

Пусть также $n=p_1 * p2 * \ldots * p_n^k$ тогда, чтобы ab=kn надо, чтобы $\mathbf{a=p_1 * p_2 * \ldots * p_x\ K}$, $\mathbf{b=p_m^v * \ldots * p_n^k * C}$, где множители $p_m^v,\ldots,p_n^k$, недостающие множители для разложения числа **n** на простые множители и еще какой-то целый множитель. То есть ab=nKC, если К·С =m

Общая формула возникновения нулей в таблице: ab=mn.

Замечание №1.

НОД(a,n) и НОД(b,n) не равен единице, в том случае, если порядок таблицы n не простое число. Так как было сказано выше,
$\mathbf{n=p_1 * p_2 * \ldots * p_m^v * p_c^f * \ldots * p_n^k}$.
$\mathbf{a=p_1 * p_2 * \ldots * p_m^v * A}$
$\mathbf{b=p_c^f * \ldots * p_n^k * B}$.
Показатели степеней могут меняться в зависимости от комбинации сомножителей.

НОД(a,n) будет равен $p_1 * p_2 * \ldots * p_m^v$ иногда, а именно, когда число А входит в разложение на множители числа n, это произведение может домножаться на данное число А, или повышать степень одного из сомножителей.
Следовательно, за исключением тех случаев, когда n простое НОД(a,n) и НОД(b,n) не равен 1.

2.1.5. Закономерность таблиц простого порядка:

Утверждение:

В таблицах простого порядка нули не встречаются.

Доказательство:

Докажем данное утверждение методом от противного.

Чтобы в таблице возник нуль, нужно:
ab=kn, где n- простое, k- целое, a,b<n.
ab=kn-очевидно, что правая часть делится на n, откуда следует, что и левая часть делится на n, т.к. мы имеем верное равенство. Т.к. левая часть делится на n, то а делится на n или b делится на n, но a<n и b<n, следовательно а не делится на n и b

не делится на n, следовательно получаем противоречие, заключающееся в том, что мы имеем верное равенство, и правая часть делится на n, а левая не делится на n – такого быть не может.

Следовательно, в таблицах простого порядка нули не встречаются.

2.2. Работа со степенями остатков

2.2.1. Некоторые закономерности возникновения периодов

Утверждение:

Пусть есть какой-то модуль n, тогда при возведении в степень числа (n-1) остатки будут 1 и (n-1).

Доказательство:

Выберем произвольный модуль n, и будем возводить число (n-1) последовательно в степени и брать остатки по модулю n.

$(n-1)^0=1(\mathrm{mod}\ n)$

$(n-1)^1=n-1=-1(\mathrm{mod}\ n)$

$(n-1)^2=1(\mathrm{mod}\ n)$

Расчеты:

n^2-2n+1 n

n^2 n-2

-2n

-2n

1

$(n-1)^3=-1(\mathrm{mod}\ n)$

n3-3n2+3n-1 n

n3 n2-3n+3

-3n2

-3n2

3n

3n

-1

Мы видим, что получается период 1 и (-1).

Замечание:

Допустим число n . Тогда, если n – порядок (модуль), а k –целое число, тогда имеем такое выражение $(n-k)^m=(-1)^m{*}k^m(\mathrm{mod}\ n)$. Данное утверждение доказывается по алгоритму, указанному выше, при чем такой период сохраняется, только до тех пор, пока $k^m<n$, но так как у нас n , то период будет сохраняться достаточно долго.

2.2.2.Малая теорема Ферма. Доказательство.

Утверждение:

Пусть k – выбранный модуль, а m – целое число, тогда $m^k=m(\mathrm{mod}\ k)$.

Доказательство:

Докажем это утверждение методом математической индукции.

Шаг первый: Проверяем для m=2.

$2^k=2(\mathrm{mod}\ k)$

Мы можем представить 2^k как $(1+1)^k$

$(1+1)^k=1^k+1^k(\mathrm{mod}\ k)$ это выражение приняло такой вид, ведь при разложение на слагаемые по биному Ньютона все коэффициенты делятся на k.

Шаг второй:
Предполагаем, что для (m-1) данное выражение верно.

Шаг третий: Докажем, что если для (m-1) верно, то и для m также верно.
$m^k=m(\text{mod } k)$
Преобразуем немного это выражение:
$((m-1)+1)^k=(m-1)^k+1^k(\text{mod } k)$, так как все коэффициенты делятся на k, по индуктивному предположению $(m-1)^k=m-1(\text{mod } k)$, следовательно
$m-1+1=m\ (\text{mod } k)$
$m=m\ (\text{mod } k)$.

Что и требовалось доказать.

```latex
\documentclass{article}
\usepackage[russian]{babel}
\usepackage[]{inputenc}
\usepackage[T2A]{fontenc}

\title{Проект \\ <<Контакты>>}
\author{Наталья Донова, Наталья Дашкевич, Дарья Колягина, Анастасия
Матюха}
\date{КЛШ 2001}

\begin{document}
\tableofcontents
\section{Формулировка задачи}
Мы рассматриваем вилку и розетку, являющиеся правильными
$n$-угольниками ($n=1,2,3,\dots$). 1-угольником мы называем точку, а
2-угольником --- отрезок. Контакты расположены по  углам многоугольников и
пронумерованы, как на вилке, так и на розетке целыми числами от $1$ до $n$.
При соединении вилки с розеткой соответствующие контакты могут совпадать.
Работающими называются такие вилка и розетка, что при любом способе
втыкания вилки в розетку хотя бы один контакт совпадает.

Нам надо найти все варианты работающих вилок и розеток и систему, по
которой работают работающие розетка с вилкой.

\section{Обозначения}
\begin{definition}
Работающая пара вилка--розетка --- это такая пара, что при любом повороте
вилки относительно розетки совпал хотя бы один контакт вилки с
соответствующим контактом розетки.
\end{definition}

Докажем, что в работающей паре при каждом повороте должен совпасть
только один контакт.

Совпадение любого контакта повторяется 1 раз в $n$ поворотов. Значит,
выбрав произвольно $n$ последовательных поворотов мы получили одно и
только одно совпадение каждого из контактов, следовательно, если на одном
из поворотов совпадают хотя бы 2 контакта, то при каком-то другом повороте
не совпадает ни один контакт. Следовательно, при каждом повороте должен
совпадать только один контакт.

Допустим, на вилке и на розетке по $n$ контактов. Для малых $n=1, 2, 3, 4$
можно перебором найти способ расстановки номеров контактов на вилке и на
розетке или доказать, что такого способа нумерации нет.

Зафиксируем розетку и пронумеруем ее контакты по часовой стрелке. Также
будем рассматривать варианты расстановок, совмещающихся поворотом как
один.
```

Пусть a_i --- это точка, в которой при каком-то повороте оказался контакт i. Розетка пронумерована по часовой стрелке, следовательно, соседние контакты отличаются нумерацией на 1, кроме <<крайних>> , так как последняя цифра на розетке и вилке переходит в 1.

Пусть a_i --- место, где первоначально находился контакт i, $a’_i$ --- место, где стал находиться контакт после одного поворота по часовой стрелке.

Если бы число контактов на розетке было бы бесконечным, то $a’_i=a_i+1$. Но поскольку последняя цифра переходит в 1, то такая формула недействительна. Но так как 1 и последняя цифра$+1$ сравнимы по модулю n, то
$$a’_i\equiv a_i+1\ (\mod n)$$

Обозначая штрихами у a_i число поворотов от первоначального положения, получаем формулы для двух и более поворотов:
\begin{eqnarray*}
a_i’’_i& \equiv & a_i+2\ (\mod n)\\
a_i’’’_i& \equiv & a_i+3\ (\mod n)\\
& \dots&\\
a_i\overbrace{‘’^{\dots}’’}^m & \equiv & a_i + m\ (\mod n)
\end{\eqnarray*}

\section{Частные случаи}
Для $n=1$ существует только 1 вариант вилки. При этом получаем рабочую пару.

Для $n=2$ существует также один вариант, но пара не будет рабочей, так как в начальном положении совпадают сразу 2 контакта, а согласно рассмотренной ранее теореме это невозможно.

\section{}

\end{document}

Красноярская Летняя Школа 2001года

Али-Баба возвращается

Вика Луковская, Артем Мудрик, Владимир Папков, Женя Распопов
Консультанты: Аня Бучина, Юра Вольвовский

План доклада:

1. Условие задачи.
2. Основные положения.
3. Доказательство основных положений.
4. Доказательство частных случаев.

Условие задачи.

Дано: Бочка с p отверстиями. В каждом отверстии бутылка, причём вверх горлом или дном. В отверстия можно вставлять руки и переворачивать бутылки. После того, как руки убирают, бочка крутится и останавливается через несколько оборотов.

Определить: каким минимальным числом рук n можно установить в одинаковое положение все p бутылок?

Основные положения.

1. Для любого p хватает p-1 рук.
2. Если p – простое, то нужно p-1 рук.
3. Для любого p меньше p/2 рук не хватает.

Доказательство основных положений.

Для удобства обозначим различные положения бутылок как 0 и + соответственно.

1.Вставляем руки в отверстия и устанавливаем все бутылки одинаково. Если пещера не открылась, то снова вставляем все руки, если:

а) попадаем на те же отверстия, то все бутылки переворачиваем, - пещера открывается;

б) попадаем на одну, стоящую по-другому, то переворачиваем её.

2.Если p бутылок можно установить с определённым периодом, то мы выиграли. Т. е. Если у нас есть при определённом количестве бутылок 2 периода a и b , то всегда найдётся такое число c, которое будет являться НОД количества бутылок a и b. Если n – простое число и имеются 2 меньших числа a и b, являющихся периодами, то должно найтись число c, является НОД c и b или c и a, т. к. c – простое число, то это число 1. Из этого следует: для n – простого минимальное количество рук равно n-1.

У нас есть p бутылок (p - простое) и p-2 рук. Мы знаем, что у нас есть определённое количество 0 и +. Также мы знаем, что у нас через количество отверстий l бутылки стоят одинаково. Мы вставляем руки в отверстия так, чтобы 2 оставшихся отверстия были на расстоянии l друг от друга, устанавливаем все бутылки одинаково и выигрываем. Однако т. к. n-простое, то у n и l НОД=1, следовательно, l=1, а следовательно, бутылки уже все стоят одинаково и нет смысла делать что-нибудь ещё, следовательно, для p - простого n-2 рук не хватает.

Доказательство частных случаев.

1,1. 4 отверстия, 2 руки.

Мы установили 3 бутылки +.Бочка крутится. Вставляем руки подряд. Если попали на 0, то выигрыш. Меняем 1 + на 0. Вставляем руки по диагонали.Если попадаем на 0, то выигрыш. Если + и 0, то меняем 0 на +, а + на 0.Вставляем руки по диагонали, то выигрыш.

1,2. 6 отверстий, 4 руки.

Мы установили 5 бутылок +. Бочка крутится. Вставляем руки подряд.Получаем ситуации: + и 0 через 1 (выигрыш) или 2+, 2 0, 1+, 1 0. Вставляем 4 подряд. Получаем ситуацию 1+ через 1 0 – выигрыш.

1,3. 9 отверстий, 6 рук.

Мы установили 8 бутылок +. Бочка крутится. Вставляем по 2 руки через 1. Получаем ситуацию: 2+ по 1 через 2 0, остальные 0. Вставляем по 1 руке через 1. Получаем ситуацию: 3+ по 1 через 2 0, остальные 0 – выигрыш.

Красноярская Летняя Школа 2001года

Проект “Ладья – ферзь»

Чесноков Илья, Рузанов Тима

Консультант: Аня Бучина

Задача

Двое играют в следующую игру: на поле ограниченном снизу и слева они двигают ладью по очереди вниз или влево. Выигрывает тот, кто ставит ладью в угол доски (клетка 1,1). Требуется найти правильную стратегию игры, и определить, кто будет выигрывать, начиная с данной точки поля.

Решение:

Играя, мы заметили, что тот, кто попадает на главную диагональ (1,1; 2,2;3,3…) выигрывает в том случае, если после хода второго он снова ходит на диагональ. Таким образом, первый игрок попадает на клетку 2,2, из которой второй игрок ходит на клетку 2,1 или 1,2. Таким образом, при правильной игре, всегда выигрывает первый, кроме того случая, когда ладья изначально стоит на главной диагонали. В этом случае – выигрывает второй. Данная стратегия является выигрышной т.к. с любой точки поля, не принадлежащей диагонали можно попасть на диагональ, а если ладья стоит на диагонали приходиться уходить с нее.

Ферзь.

Задача:

Двое играют в следующую игру: на поле ограниченном по очереди снизу и слева они двигают ферзя вниз, влево или вниз по диагонали. Выигрывает тот, кто ставит ферзя в угол доски (клетка 1,1). Требуется найти правильную стратегию игры, и определить, кто будет выигрывать, начиная с данной точки поля.

Решение:

Играя в игру Ферзь, мы заметили, что выигрывает первым тот, кто первым попадает на точку 2,3 или 3,2, а также 4,6 и 6,4. Мы заметили что, ни с какой из этих четырех точек нельзя попасть на другую, а также на точку 1,1. После этого мы начали рисовать поле, и отмечать на нем клетки, попадая на которые выигрываешь. Нарисовав поле на небольшом листе, мы выписали координаты выигрышных полей (они оказались симметричны), и заметили, что одна координата увеличиваются с периодом - +1,+2,+1,+2,+2, а другая - +2,+3, +2, +3,+3.

Но, нарисовав поле на большем листе, и выделив выигрышные поля, мы заметили. Что происходят слом периодов. Так повторилось и с этим большим периодом. На основе преломления трех периодов, мы выявили закономерность изменения периодов:

Обозначим период p, а номер периода n, тогда $p^n = p^{n-1}*2+p^{n-2} + p^{n-3}+…+p^1+3$

Для координат x и y $P^1=23$ или $p^1=12$.

Возьмем свойство алгоритма построения координат выигрышных полей: они занимают весь натуральный ряд таким образом, что на данном участке натурального ряда x_1-y_1=1, а x_k-y_k=k.

Построим последовательность. Будем строить последовательность следующим образом: $x_0=y_0=1$, $x_1=2, y_1= x_1+1=3$. Т.е. y_k мы вычисляем путем прибавления k к x_k, $y_k=k+x_k$, а x_{k+1} будем ставить на свободное место, ближайшее к x_0.

Докажем что координаты, образованные данной последовательностью являются координатами выигрышных точек.

1) Докажем, что ни с какой точки этой последовательности нельзя попасть на другую точку данной последовательности.

Точки данной последовательности располагаются таким образом, что, занимая весь натуральный ряд, они не совпадают. Следовательно, ни с какого выигрышного поля нельзя попасть на другое поле по горизонтали или по вертикали.

Докажем, что нельзя попасть с одной точки на другую по диагонали. Предположим, что с точки x_k, y_k, можно попасть на точку x_m, y_m, по диагонали. Это означает, что x_k-y_k= x_m- y_m. Мы знаем, что x_k-y_k=k, а x_m-y_m=m. Это значит, что k=m, чего не может быть для данной последовательности. Значит, ходя по диагонали нельзя попасть с одной выигрышной точки на другую.

2) Докажем, что с любой точки поля (не принадлежащей последовательности), можно попасть на точку, принадлежащую данной последовательности. Раз числа этой последовательности занимают весь натуральный ряд, понятно, что ходя во все стороны всегда можно попасть на три такие точки: по вертикали,

по горизонтали и по диагонали. По нашей схеме мы видим, что выигрышные точки разбивают поле на три части. Очевидно, что из одной части мы всегда можем попасть на выигрышную точку по горизонтали, из другой - по вертикали. Докажем, что из всех клеток центральной части можно попасть на выигрышную точку, двигаясь по диагонали.

Для доказательства разобьем поле на три части: одну, где, играя по правилам можно попасть на выигрышную клетку по диагонали, и две, где, играя по правилам нельзя попасть на выигрышную клетку по диагонали (в одной части $x>y$, а в другой – $x<y$). Если $x=y$, то можно сразу же попасть на клетку 1,1. Докажем, что эти части совпадают с теми, на которые разбивает поле наша последовательность.

Рассмотрим одну часть($x>y$), где нельзя попасть на выигрышную клетку по диагонали. Возьмем точку, не принадлежащую этой последовательности, с координатами x и y. Выигрышная точка, находящаяся на одной диагонали с данной имеет координаты $(x+n)$, $(y+n)$, разность ее координат равна k, т.е. $x+n-(y+n)=k$, $x+n-y-n=x-y=k$. Выигрышная точка, находящаяся на той же горизонтали, что и наша x,y, имеет координаты p, y, причем $p-y<(x+n)-(y+n)$, т.к. они обе принадлежат нашей последовательности, а $y+n>y$. Значит $p-y<x-y$, а $p<x$. То есть все точки данной части находятся правее выигрышных точек. Значит, эта часть совпадает с той, на которую разбивает поле наша последовательность.

Аналогично доказываем, что вторая часть, где нельзя ходить по диагонали ($x<y$) совпадает со второй частью поля, отделяемой нашей последовательностью.

Берем точку x,y.

$(y+n)-(x+n)=y-n-x+n=y-x=k$.

Точка, находящаяся на той же вертикале, что и x,y имеет разность координат меньше k, $d-x<k$, т.е. $y-x>d-x$, $y>d$, что и требовалось доказать.

Раз две части поля совпадают, то и третья тоже. Значит в средней части поля, отделяемой выигрышными точками с любой точки можно сходить по диагонали на выигрышную точку.

Красноярская Летняя Школа 2001года

Али баба.

Тимур Акбулатов, Коля Александренко
Консультант: Андрей Иванов

Правила: Есть бочка, дно которой - правильный многоугольник. В углах бочки стоят бутылки горлышком вверх.
Али баба сует руки в бочку и переворачивает две бутылки(он не знает какие бутылки он перевернул, а может только контролировать расстояния между руками). далее Бочка начинает крутиться. После остановки Али баба вновь засовывает руки в бочку. Он опять не знает на какие бутылки он попадет(уже перевернутые или нет). Так продолжается сколько угодно раз. Сколько бутылок он гарантировано сможет перевернуть бутылок.
Решение:
1. Между двумя расстановками 2n и 2n+1 нет никакой разницы в количестве перевернутых бутылок, так как максимальный шаг здесь будет n-1.
После этого шага бочка делится на две половины и в самом худшем случае переворачивает бутылки только на одной (меньшей) из них, т.е.
имеет смысл рассматривать многоугольники только с четным числом вершин.
2. Задача сводится к игре в полоску: Дана полоска длиной n. Надо отметить на ней наименьшее число делений так, чтобы с помощью них можно
было бы отмерить любой отрезок длинной от 1 до n. В игре Али баба мы первым ходом n/2-1 делим бочку на две половины и работаем только с одной из них.
Чтобы Али баба больше не смог брать бутылок расстояния между ними должны пробегать все отрезки от 1 до n/2, а это и есть полоска.

Нам известна стратегия деления полоски, которая обосновывается следующим образом:
1. Пусть мы имеем полоску длины n, тогда мы можем единственным образом(способы разметки имеющие одинаковые свойства считаем за один) отметим отрезок длины n-1.
2. Отрезок длины n-2 мы можем отмерить тремя способами: справа, слева и посередине. Если отмерить отрезок слева, то нужно поставить деление на расстоянии 2 от правого конца (мы получаем отрезки: n-2,1,2). Если отмерить отрезок по середине, то мы получим отрезки: n-2,1. Если отмерить отрезок справа, то мы получим отрезки: n-2,n-3,2. Заметим, что самое выгодное деление это последнее(т.е. справа), поэтому его мы и используем.
3. Следующий отрезок, который нужно отмерить будет длины n-4. Рассмотрим все возможные варианты и заметим, что наиболее выгодным является способ, указанный на рисунке(получаем отрезки: 3,4,n-6,n-4).

Красноярская Летняя Школа 2001года

Симметрические многочлены.

Славина Елена, Щелканов Иван
Консультант: Ройтберг Михаил Абрамович.

Симметрические многочлены – это многочлены от двух переменных, которые от замены одной переменной на другую не изменяются.

Например: x^2+y^2, $x+y-xy$.

Степенью симметрического многочлена является наибольшая суммарная степень переменных.

Например: x^2+y^2-xy –многочлен второй степени;
$x^3+xy+x+y+y^3$ –многочлен третьей степени.

Целью задачи является доказать, что любой симметрический многочлен можно представить в виде суммы или произведения симметрических многочленов (xy) и $(x+y)$.

Количество новых (характерных только для этой степени) одночленов, составляющих симметрический многочлен, на единицу больше, чем степень многочлена (рис.1)

Степень	Количество	Пример
1	2	x, y
2	3	x^2, y^2, xy
3	4	x^3, y^3, x^2y, xy^2,
4	5	x^4, y^4, x^3y, x^2y^2, xy^3

(рис.1)

Это происходит, потому что если рассматривать многочлены только относительно (x) или (y), то для третьей степени заметим: x^0 , x^1, x^2, x^3 т.е. четыре одночлена степени меньшей четырёх.

У одночленов многочлена, состоящих из произведения одной переменной на другую, за скобку можно вынести (xy) в некоторой степени следовательно оставшееся выражение будет иметь степень на порядок (несколько порядков) меньше и выглядеть $(x^m +y^m)$.

Пример: $x^4y^2+x^2y^4=x^22^2(x^2+y^2)$.

Следовательно, необходимо научиться раскладывать многочлены вида $(x^n +y^n)$.

Для n=2k+1 это не составляет труда:

$$x^n +y^n = (x+y)(x^{n-1} + x^{n-2} + y+\dots + y^{n-2} x + y^{n-1})$$

Далее предстоит разложить :$(x^{n-1} + x^{n-2} y+\ldots + y^{n-2} x + y^{n-1})$ и т.д.
Если n=2k то необходимо вывести новую формулу:

$$(x^{n-1} + y^{n-1})(x+y)= x^n + y^n + x^{n-1} y + xy^{n-1} = (x^n + y^n)+xy(x^{n-2} + y^{n-2}),$$

т.е. $x^n + y^n=(x^{n-1} + y^{n-1})(x+y) - xy(x^{n-2} + y^{n-2})$

Теперь обозначим x+y=h, xy=p и воспользуемся полученной формулой для любого (четного и нечетного) n.

$$x^2 + y^2 = (x + y)^2 – 2xy = h^2 – 2p$$
$$x^3 + y^3 = (x^2 + y^2)(x+y) – xy(x+y)= h^3 – 2hp – hp = h^3 – 3hp,$$

т.е. получается следующая картина (рис.2)

Степень	Пример
1	h
2	$h^2 – 2p$
3	$h^3 – 3hp$
4	$h^4 – 4h^2 p+ p^2$
5	$h^5 – 5h^3 p+ 5hp^2$

Рис.2

Проанализировав полученный результат делаем следующие выводы:

1. Чтобы определить количество элементов при разложении симметрического многочлена вида ($x^n +y^n$), где n степень многочлена, следует: **n/2+1** (при n=2k), **n/2+1/2** (при n = 2k+1).
2. Каждый элемент имеет вид $a_k h^m p^l$, где a_k- некоторый коэффициент, **h=x+y, p=xy**, m,l - степени h и p.
3. Степень h у первого элемента всегда равна n, где n степень симметрического многочлена; затем у последующих элементов степень h понижается на 2, пока не станет равна 1 (при n = 2k+1) или 0 (при n=2k).
4. Степень p в первом элементе всегда равна 0, в последующих элементах увеличивается на 1, пока не станет на 1 меньше, чем количество элементов.
5. $a_1 = 1$ (всегда).
   $a_2 = n$ (где n степень многочлена)
   $a_k = 2$ (при n =2k)
   $a_k = n$ (при n = 2k+1)
6. Коэффициент a_k элементов определяется следующим образом:
   - Изображается числовая пирамида, где первый столбец состоит из 0 и последующих единиц, следующие столбцы начинаются на 2 и смещены вниз на 2 строки относительно предыдущего столбца.
   - Если обозначить цифры пирамиды буквой a_{nm}, где n - номер столбца, а m – номер строки, то a_{nm} находится по формуле :

$\mathbf{a_{nm} = a_{n(m-1)} + a_{(n-1)(m-2)}}$

Числовая пирамида.

0 **1** **1** **1** **1** **1** **1** **1** **1** **1**	 **2** **3** **4** **5** **6** **7** **8** **9**	 **2** **5** **9** **14** **20** **27**	 **2** **7** **16** **30**	 **2** **9**	Номер строки соответствует степени симметрического многочлена (причем 0 – нулевая степень). Номер столбца соответствует номеру элемента, коэффициент которого определяется, т. е. 1-ый столбец – коэффициенты первого элемента разных степеней, 2-ой -второго и т. д.

Если разложенный симметрический многочлен степени n обозначить как H_n, то:

$$H_n = H_{n-1}h - H_{n-2}p, \text{ где } h = x+y,\ p = xy$$

$$H_n(h,p) = a_0^n h^n + a_1^n h^{n-2} p + \ldots + \boldsymbol{a_s^n} h^{n-2s} p^s + \ldots$$

Данная пирамида позволяет определить коэффициент $\mathbf{a_s^n}$, который можно получить, если сложить одночлены:

$$a_s^n h^{n-2s} p^s = (a_x^n h^{n-2s-1} p^s)h + (a_y^n h^{n-2s-2} p^{s-1})p$$

Таким образом, если взять некий фрагмент пирамиды (рисунок 3)

$\boldsymbol{a_y^n}$		h^{n-2s-2}
	$\boldsymbol{a_x^n}$	h^{n-2s-1}
	$\boldsymbol{a_s^n}$	h^{n-2s}
p^{s-1}	p^s	

(рисунок 3)

И обозначить h – строка, p – столбец, причём $\mathbf{a_y^n}$ имеет координаты **($\mathbf{h^{n-2s-2}}$, $\mathbf{p}^{s-1}$)**, $\mathbf{a_x^n}$ **($\mathbf{h^{n-2s-1}}$; $\mathbf{p^s}$)**, $\mathbf{a_s^n}$ **($\mathbf{h^{n-2s}}$; $\mathbf{p^s}$)**, получаем подтверждение правилу нахождения коэффициентов многочлена, полученному опытным путём:

$$a_{nm} = a_{n(m-1)} + a_{(n-1)(m-2)},$$

где n – номер столбца, а m – строки.