Краевая Летняя Школа -98

XXIII сезон

Красноярск, Таежный. 18 июля - 7 августа 1998 г.

НАЧАЛА АРИФМЕТИКИ и АЛГЕБРЫ

Программа курса.

Лектор - М. А. Ройтберг.

20 июля.

1. Делимость целых чисел. Основные понятия: делимость, делимое, делитель, частное, остаток. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел. Решето Эратосфена. “Полезные” и “бесполезные” простые числа при построении решета Эратосфена для чисел от 2 до N.

21 июля.

2. Обозначение: $x = a \pmod{d}$. Формула, описывающая все числа x, дающие остаток a при делении на d:

$$x = a + d\cdot n \text{ (n - произвольное целое число)}$$

Разложение на простые множители. Понятие об общих делителях и общих кратных двух (и нескольких) чисел.
Наи*больший* общий делитель (НОД) и наи*меньшее* общее кратное (НОК). Нахождение НОД и НОК с помощью разложения на простые множители.

22 июля.

3. Свойства делимости:

1) a *делится на* n, b *делится на* n è $a \pm b$ *делится на* n

2) a *делится на* n, x -целое число è $a\cdot x$ *делится на* n

Определение остатка от деления на n выражений вида $a\cdot b$, $a \pm b$ по остаткам от деления на n чисел a и b.

23 июля.

4. Понятие о решении в целых числах уравнения

$$a\cdot x + b\cdot y = c$$

Алгоритм Евклида. Число E (a, b) - результат применения алгоритма Евклида к числам a и b.

25 июля.

5. Анализ алгоритма Евклида.

<u>5.1. Свойства</u>:

1). Алгоритм Евклида останавливается и выдает результат E(a, b) для любых натуральных чисел a и b.

2) $E(a, b) = a \cdot x + b \cdot y$ для некоторых *целых* чисел x и y
("подъем от предпоследней строки").

3) E(a, b) - общий делитель чисел a и b
("подъем от последней строки").

Следствие 1. E(a, b) = НОД(a, b)

Следствие 2. НОД(a, b) делится на любой общий делитель чисел a и b.

5.2. <u>Алгоритм Евклида и простые числа</u>.

Теорема. Если произведение чисел

$$a \cdot b \cdot \ldots \cdot c$$

делится на простое число p, то хотя бы один из сомножителей делится на p.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ. Любое натуральное число можно представить в виде произведения простых чисел. Это можно сделать *единственным* (с точностью до перестановки сомножителей) способом.

27 июля.

6. Примеры множеств, на которых (а) определены операции сложения и умножения и (б) выполняются сочетательный, переместительный и распределительный законы: натуральные числа, целые числа, действительные числа, остатки от деления на натуральное число d (варианты: d - простое; d - составное).Выполнимость обратных операций (вычитания и деления) в этих множествах.
   Еще один важный пример - *многочлены* с действительными коэффициентами.
   Алгоритм деления многочленов "уголком".

29 июля.

7. Продолжение знакомства с многочленами. Стандартный вид многочлена. Степень многочлена. Старший коэффициент и свободный член. Поведение степени, старшиего коэффициента и свободного члена при умножении многочленов.

<u>Теорема о делении многочленов</u>. Для любых многочленов A(x) и B(x) существует *единственная* пара многочленов Q(x) и R(x) (*частное* и *остаток*) такие, что:

1) $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$

2) степень остатка R(x) *меньше,* чем степень делителя B(x)

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АЛГЕБРЫ. Любое многочлен A(x) с действительными коэффициентами можно представить в виде произведения

$$a \cdot P1(x) \cdot \ldots \cdot Pn(x)$$

где a - старший коэффициент многочлена A(x);

P1(x)·....·Pn(x) - многочлены одного из двух следующих видов: (1) x+c; (2) x +b·x+c (b - 4c <0).

Это можно сделать *единственным* (с точностью до перестановки сомножителей) способом.

31 июля.

Заключительные этюды. Теорема Безу. Рациональные приближения для $\sqrt{2}$. Доказательства иррациональности $\sqrt{2}$. Площадь окружности. Гиппократовы луночки.

Итоговые здачи.

1.Разложить на простые множители.

1001;1024;1734;27*1734.

2.Найти НОД НОК.

(36;30);(1024;258);(1734;101);(1010;3520).

3.Решить систему.

a) x=6 (mod 14)
x=3 (mod 15)

b) x=1 (mod 8)
x=3 (mod 12)

c) x=1 (mod 3)
x=3 (mod 5)
x=5(mod 7)

4.Какой цифрой оканчивается число

$(-27)^{27}$;$(-28)^{28}$;$(-27)^{27}+(-28)^{28}$?

5.С помощью алгоритма Евклида решить в целых числах уравнения.

a) 1917x+1991y=1
b) 1917x+1991y=2

Решения проверить

6. Решить систему.

а) НОД(x,y)=5
НОК(x,y)=31

б) НОД(x,y)=5
НОК(x,y)=10

в) НОД(x,y)=1
НОК(x,y)=4

г) НОД(x,y)=5
НОК(x,y)=30

д) НОД(x,y)=1
НОК(x,y)=30.

7.Найти остаток от деления на 11 чисел:

a) 5a-2b,
b) 5c+2b,
c) a+b+c,

если известно,что:
a=2 (mod 11); b=6 (mod 11); c=7 (mod 11).

8.Решить уравнения:

a) $x^2=1$ (mod 11),
b) $x^2=5$ (mod 11).

9. Разделить многочлены с остатком.

a) $x^4+4x^3+6x^2+10x+7$: x^2+2x+1;
b) $2x^3+5x^2+3x+2$: x^2+2x+1;
c) $x+1$: x^2+2x+1;
d) 5 : x+8;
e) 10 : 7.

10.Решить уравнение.

$x^3-7x^2+10x-4=0$.

Теоретические вопросы (формулировки):

1.Алгоритм Евклида для многочленов.
2.Основная теорема арифметики.
3.Основная теорема алгебры.

Краевая Летняя Школа -98

XXIII сезон

Красноярск, Таежный. 18 июля - 7 августа 1998 г.

НАЧАЛА АРИФМЕТИКИ и АЛГЕБРЫ

Лектор - **Михаил Ройтберг**

Преподаватели: **Сергей Бабенышев, Антон Борисюк, Наталья Бурученко, Антон Верещагин, Елизавета Ермошкина, Андрей Иванов, Ольга Четверина**

ШКОЛЬНИКИ:

Агапова Ольга
Аникин Алексей
Бекмухаметов Дмитрий
Большаков Илья
Волженцев Александр
Голубов Дмитрий
Гордиенко Максим
Гурков Василий
Долгушина Ксения
Инжелевский Евгений
Карбовская Мария
Ким Ирина
Кирющенко Вячеслав
Краева Елена
Куров Константин
Леонтьев Владимир
Менделеев Яков
Мищенко Александр

Осадченко Илья

Сизых Николай

Чагина Анастасия

Шовунова Ольга

Засыпкина Ольга

Сазонова Татьяна

Фрейдман Анастасия

Шарих Наталья

Богданов Владимир

НАЧАЛА АРИФМЕТИКИ и АЛГЕБРЫ

Темы курсовых проектов

1. Агапова О . Об остатках от деления квадратов.
   Консультант: Н. Бурученко.
2. Аникин А. Итерации палаточного отображения.
   Консультант: А. Иванов.
3. Бекмухаметов Д. Кирющенко В. Таблицы умножения остатков.
   Консультанты: М.Ройтберг, О. Четверина.
4. Волженцев А., Гурков В. Цепные дроби.
   Консультант: А. Верещагин
5. Голубов Д. Игра “Раскрашивание карт”.
   Консультант: М.Ройтберг
6. Гордиенко М., Сизых Н. Симметрические многочлены.
   Консультанты: А. Борисюк, М.Ройтберг
7. Долгушина К., Сазонова Т., Фрейдман А., Шарих Н. Золотые числа.
   Консультанты: А. Борисюк, М.Ройтберг
8. Инжелевский Е., Куров К. Наблюдения над степенями в арифметике остатков.
   Консультанты: М.Ройтберг, О. Четверина
9. Засыпкина О., Карбовская М., Краева Е. Игра “Непобедимый король”.
   Консультант: Е.Ермошкина.
10. Ким Ирина. Возвратные уравнения.
    Консультант: Н. Бурученко.
11. Леонтьев В., Чагина А. Как найти число по заданному количеству делителей и наоборот.
    Консультанты: С. Бабенышев, М.Ройтберг
12. Менделеев Я., Осадченко И. Квадратно-треугольные числа.
    Консультант: А.Борисюк
13. Менделеев Я., Сизых Н. Игра “Раскрась полоску”
    Консультант: А.Борисюк
14. Мищенко А. Преобразования правильных многоугольников.
    Консультант: М.Ройтберг
15. Шовунова О. Игра “Кучки”
    Консультанты: А. Верещагин, А. Иванов

16. Богданов В. Цепные дроби и числа Фибоначчи
Консультант: А. Верещагин

Итоговые задачи. ***Реши одну-две задачи из каждой группы.***

1.Разложить на простые множители.

7007; 512; 162·350

2.Найти НОД и НОК.

(36;30); (1024;258); (1734;101); (1010;3520).

3.Решить систему.

a) x=7 (mod 14)
x=4 (mod 15)

b) x=2 (mod 9)
x=3 (mod 12)

c) x=2 (mod 3)
x=2 (mod 5)
x=2(mod 7)

4.Какой цифрой оканчивается число

$(-57)^{27}$; $(-58)^{28}$; $(-57)^{27}+(-58)^{28}$?

5.С помощью алгоритма Евклида решить в целых числах уравнения.

a) 17x+91y=1
b) 17x+91y=2

Решения проверить

6. Решить систему[**]

а) НОД(x,y)=7
НОК(x,y)=31

б) НОД(x,y)=7
НОК(x,y)=14

в) НОД(x,y)=1
НОК(x,y)=9

г) НОД(x,y)=3
НОК(x,y)=30

д) НОД(x,y)=1
НОК(x,y)=70.

7.Найти остаток от деления на 13 следующих чисел:

a) 5a-2b,
b) 5c+2b,
c) a+b+c,

если известно,что:
a=2 (mod 13); b=6 (mod 13); c=7 (mod 13).

8.Решить уравнения:

a) $x^2=1$ (mod 11),
b) $x^2=5$ (mod 11).

9. Разделить многочлены с остатком.

a) $x^4+4x^3+6x^2+6x+4$: x^2+2x+1;
b) $2x^3+3x^2+3x+3$: x^2-1;
c) $4x+2$: x^2+2x+1;
d) 8 : x+8;
e) 10 : 7.

10.Решить уравнение.

a) $x^3-5x^2+7x-3=0$.
b) $x^3+2x^2+2x+1=0$.

11.Теоретические вопросы[***]

Попробуй сформулировать одну из следующих теорем:

1.Теорема о делении с остатком для многочленов.
2.Основная теорема арифметики.
3.Основная теорема алгебры.
4. Теорема Безу.

Наблюдения над степенями в арифметике остатков.

Евгений Инжелевский, Константин Куров

1. ЧТО МЫ ИССЛЕДОВАЛИ.

Мы рассматривали остатки от деления разных чисел на некоторые число **d** (мы брали разные **d**) .Известно , что с такими остатками можно выполнять действия как с натуральными числами.

Нас интересовали степени остатков . Мы вычисляли различные степени всех возможных остатков при делении на числа **d**=от 2 до 17. Для каждого **d** и каждого остатка x мы вычисляли значения остатков степеней до тех пор ,пока не происходило одно из:

1) $x_n=1(\mathrm{mod}\ d)$
2) $x_n=0(\mathrm{mod}\ d)$
3) $x_n=x_k$ ($k<n$)

Последовательность $x_1, x_2,..., x_n$ до момента остановки назовём последовательностью степеней (П.С.).

2. НАБЛЮДЕНИЯ.

1) Длина последовательности степеней (Д.П.С.) по модулю d не превосходит d-1.
2) Пусть d– простое число. Тогда верно следующее.

2.1) П.С. оканчивается по правилу 1, т.е. $x_n=1(\mathrm{mod}\ d)$ для некоторого $n < d-1$.

Пример. Пусть $d = 5$; $x = 2$. Тогда $x^2 = 4$ (mod 5); $x^3= 3$ (mod 5); $x^4=1$ (mod 5).

2.2) Длина последовательности степеней для любого x является делителем числа d-1.

. **2.3)** Найдется такой остаток x, для которого длина последовательности степеней равна d-1.

2.4) (Малая Теорема Ферма) Если d=p–простое, то при любом a

a =1(mod p).

Консультанты - М. Ройтберг, О. Четверина.

<u>Примечание консультанта</u>. Авторы сделали еще ряд интересных наблюдений (в частности, касающиеся остатков от деления на составное число) и доказали некоторые из замеченных свойств. К сожалению, недостаток времени и опыта не позволил авторам включить эти результаты в настоящую работу. М.Р.

Правила игры «Кучки.»

Играют двое. У игроков есть две кучки конфет .Они ходят поочередно.
За один ход игрок;
-съедают одну кучку(любую)
-вторую делит на две произвольные кучки (так,чтобы в обеих кучках было больше нуля конфет).
Пример:
Исходное положение

После хода первого игрока

После хода второго игрока

После хода первого игрока

Проигрыш второго игрока

Для данной игры удобно построить граф позиций.Вершины этого графа соответчствуют позициям.В данной игре позиция задается двумя числами -количеством конфет в кучках.Стрелки (ребра) показывают из какой позиции в какую можно перейти за один ход.
Позиции в графе бывают двух видов(выигрышные и проигрышные).В данном графе выигрышной позицией является такая позиция,где игрок,который должен делать ход обязательно выигрывает(при правильной игре противника).
Проигрышной позицией называется позиция,где игрок,делающий ход проигрывает.
Существует два правила покоторым строится граф
1 Если из позиции есть стрела в выигрышную,то она проигрышная.
2 Если из позиции все стрелки ведут в выигрышные,то она проигрышная.
При составлении графа позицию 1,1 берем за проигрышную.Разберем случай составления графа для кучек с 5 и 4 конфетами.
Пользуясь правилами 1 и 2 можно построить граф для случая с 4 и 5 конфетами.
Позиции 3.1 , 2.2, 4.1 , 3.2-возможное деление кучекПри составлении графа позицию 1.1 берем за проигрышную.Следуя правилам позиция 2.1 автоматически становится выигрышной,как и позиции 3.2 , 2.2 ,так как у этих позиций есть стрелки в позицию 1.1.

3.1 будет проигрышной,так как у неё есть только одна сла в 2.1 (2.1-выигрышная).4.1 будет выигрышной (так как у неё есть ход в 3.1)
3.2 будет выигрышной (так как у неё есть ход в 3.1)

Все позиции,у которых в обоих кучках нечетное количество конфет-проигрышные.Но если хоть в одной кучке четное количество конфет ,то эта позиция выигрышная (при правильной стратегии).

СТРАТЕГИЯ ИГРЫ.

Загнать противника в проигрышную позицию.Для этого надо своими ходами съедать нечётное количество конфет,а четное количество разделять на 2 кучки с нечетным количеством.

Если этого сделать нельзя,то такая стратегия является проигрышной.

Теорема ;
Докажем,что позиции ;
<нечет ,нечет>-проигрышная
<нечет,чет>-выигрышная
<чет,чет >-выигрышная
Доказательство;
1 Применим метод математической индукции к случаю<нечет,нечет>

1) Пусть для всех нечетных a,b -таких,что a,b N позиция проигрышная.
2) Исходя из 1) докажем ,что для любых нечетных c,d ,таких,что c+d=N=1 позиция <c,d>проигрышная.

Допустим ,что в одной кучке 2x+1 конфет ,а в другой 2y+1 конфет .
2x+1+2y+1=N+1. Единственно возможный ход из двух нечетных позиций - нечет. + четн .(2p+1;2(y-p)). Представим четное число, как 2k, тогда нечетное будет
2s+1, где (2s+1)-2k=2(s-k)+1 отсюда получаем, что из нечетной позиции можно получить только чет. + нечет . Пусть (2x+1;2y+1) выигрышная позиция, тогда (2p+1;2(y-p)) - проигрышная, как единственно возможная позиция после выигрышной.
Но следующим ходом мы получаем 2(y-p)=Q+R (нечет. +нечет.), причем 2(y-p)<N.
Значит из 1 следует, что позиция (Q;R) будет проигрышной, что противоречит предположению
о выигрышности (2x+1;2y+1). Итак, мы получили, что (2x+1;2y+1) проигрышная.
Докажем, что (нечет.; чет.) и (чет.; чет.) выигрышные позиции.
1. Пусть n- количество конфет в двух кучках. Самое маленькое возможное количество конфет -2.
Пусть n=2. Тогда возможна только одна позиция (1; 1) - проигрышная.
2. Пусть теорема доказана для всех позиций, в которых в двух кучках вместе ≤ N конфет.
Докажем теорему для случая N+1 конфеты. Пусть хоть в одной кучке четное число конфет: (2x;m). Нужно съесть кучку с m конфетами, а 2x поделить на (2r+1; 2(x-r)+1). Такая позиция по доказанному выше является проигрышной, то есть мы доказали утверждение.

Исследование квадратно-треугольных чисел.

Менделеев Яков и Осадченко Илья.
Консультант Борисюк Антон.

Квадратные числа - это те числа которые можно уложить в квадрат точками, так чтобы точки находились друг под другом, например 36 - квадратное число т.к. его можно уложить в квадрат точками, так чтобы точки находились друг под другом.

Треугольные числа - это те числа которые можно уложить в точками в треугольник так чтобы точки соседних рядов не лежали друг под другом, например: 36 - треугольное число, судя (если нарисовать) по кол-ву точек равному 36.

Квадратно-треугольные числа - это пересечение квадратных чисел с треугольными, например: 36 квадратно-треугольное число т.к. оно является квадратным и треугольным числом.

Попробуем вывести формулы нахождения квадратных чисел и треугольных чисел.

Для квадратных чисел формула проста k^2 , где k - номер числа в бесконечном списке квадратных чисел.

Для треугольных чисел формула сложнее, её можно найти так

$$
\begin{array}{rl}
 & 1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = S \\
+ & \\
 & \underline{n + (n-1) + ... + 3 + 2 + 1 = S} \\
 & (n + 1) + (n + 1) + ... + (n + 1) + (n + 1) = 2S
\end{array}
$$

$n + 1$ повторяется n - раз значит $n(n + 1) = 2S$ $\quad S = \frac{n(n+1)}{2}$, следовательно формула выглядит так $\frac{n(n+1)}{2}$, где n - номер числа в бесконечном списке треугольных чисел.

Теперь k^2- формула нахождения квадратных чисел, $\frac{n(n+1)}{2}$ - формула нахождения треугольных чисел, следовательно формула нахождения квадратно - треугольных чисел: $k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$, но нам надо придти к более общей формуле нахождения квадратно-треугольных чисел. Для этого произведем несложные алгебраические преобразования

$k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$ $n^2 + n = 2k^2$ $n^2 + n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 2k^2$ $\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 2k^2;$ $4\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 - 8k^2 = 1$

Пусть $2k = y$, $2\left(n + \frac{1}{2}\right) = x$, тогда уравнение будет выглядеть так,

$x^2 - 2y^2 = 1$ - уравнение Пел ля.

Уравнение решается так: $x_m + y_m = \left(x_0 + y_0\sqrt{2}\right)^m$, представим его в более удобном для вычислений виде:

$x_{m+1} + y_{m+1} = \left(x_0 + y_0\sqrt{2}\right)^{m+1} = \left(x_0 + y_0\sqrt{2}\right)\left(x_0 + y_0\sqrt{2}\right)^m = \left(x_0 + y_0\sqrt{2}\right)\left(x_m + y_m\sqrt{2}\right) = x_0x_m + 2y_0y_m + \sqrt{2}\,(y_0x_m + x_0y_m)$ x_m

x_0, y_0 - находятся подбором $x_0 = 3$ $y_0 = 2$

Итак квадратно треугольное число найдем по формуле $k = \frac{y^2}{4}$

Остатки от деления квадратов.

Агапова Оля

Консультант: Наталия Бурученко

Дано: целое число l и целое число n. Нужно найти все остатки, которые получаются при делении n^2 на l.

Решение:

Число n можно представить как $n = k \cdot l + r$ где r = 0, 1, 2, …, l-1, а k - некоторое целое число. Затем число n возводим в квадрат и получаем $n^2 = (k \cdot l + r)^2 = k^2 \cdot l^2 + 2k \cdot l + r^2$, первое и второе слагаемые делятся на l, потому что в них есть множитель l, а третье слагаемое не всегда делится на l т.к. в нем нет множителя l. Теперь подставляем значение r = 0, …, l-1 в r^2, затем делим получившееся число на l и получаем остатки от деления n^2 на l.

Вывод: при делении n^2 на l получатся такие же остатки, как при делении r^2 на l, где r = 0, 1, 2, …, l-1.

Пример: пусть l = 3, тогда r = 0, 1, 2 разделим r^2 на 3 и получим: при делении 0^2 на 3 остаток 0, при делении 1^2 на 3 остаток 1, при делении 2^2 на 3 остаток 1.

Если квадрат какого-либо числа разделить на 3, то в остатке будет 0 или 1.

Таблицы умножения остатков.

Дмитрий Бекмухаметов, Вячеслав Кирющенко

1. ВВЕДЕНИЕ.

Объектом исследования были таблицы умножения остатков от деления на разные числа. Остаток от деления произведения чисел A и B на некоторое число n зависит только от остатков от деления A на n и B на n. Поэтому остатки можно перемножать, как перемножают обычные числа.

Пояснение. Пусть A, B - натуральные числа, a, b - остатки от деления этих чисел на натуральное число n. Тогда

$$A = a+x\cdot n;\ \ B = b+y\cdot n$$

где x, y - некоторые натуральные числа. Вычисляем:

$$A\cdot B = (a+x\cdot n)\cdot(b+y\cdot n) =$$
$$= a\cdot b + b\cdot x\cdot n+a\cdot y\cdot n+x\cdot y\cdot n^2 =$$
$$= a\cdot b + n\cdot(b\cdot x+a\cdot y+x\cdot y\cdot n)$$

Значит, $A\cdot B = a\cdot b \pmod n$.

2. НУЛИ в ТАБЛИЦАХ.

Мы составили таблицы умножения для остатков по модулю 3,4,5,6,7,8,9,11. Число, по модулю которого берутся остатки будем называть ***главным числом*** или ***размером*** таблицы. В таблицу мы включали все ненулевые остатки. Таким образом, в таблице с главным числом n будет n-1 строк и столбцов.

Мы сделали некоторые наблюдения, и заметили, что в таблицах умножения для остатков по четному модулю появляются нули. Затем мы поняли, что нули появляются для остатков от деления на любое составное число. Во всех столбцах и строках таблиц простых чисел все числа различны.

Утверждение 1:Если главное число таблицы умножения остатков- составное, то в этой таблице появляются нули..

Доказательство. Составное число n получается при перемножении меньших чисел. Т.к в таблице есть все числа, меншие, чем n, то при перемножении каких то двух чисел мы получим наше число n - это 0 (mod n).

Утверждение 2:Если главное число - простое, то при перемножении любого числа ***a*** на разные числа ***x*** получатся разные результаты ***b*** (в каждой строке все числа - различные).

Доказательство. Предположим, что число ***ax*** при делении на ***p*** (где ***p*** - простое число), дает остаток ***b***. Тогда ***ax=b+pk*** (***k*** - натуральное).Пусть ***az*** при делении на ***p*** тоже дает остаток ***b***. Тогда ***az=b+pm*** (***m*** - натураль-ное). Получается система:

$$\{$$

Преобразуем ее.

$$\{$$

$$ax-pk=az-pm$$
$$ax-az=pk-pm$$
$$a(x-z)=p(k-m)$$

Таким образом, $a(x-z) \vdots p$,т.е ***a*** или ***x-z*** должно делиться на ***p***.
a не делится на *p* т.к. ***a<p*** и ***x-z*** не делится на ***p***
т.к. ***x<p*** и ***z<p*** т.е. ***/x-z/<p*** ,получили противоречие.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ.

Мы рассматривали уравнение вида ***ax=b (mod n).*** Мы старались понять, сколько решений может иметь такое уравнение (в целых числах).

1. Пусть размер таблицы - простое число.

Рассмотрим таблицу для остатков с главным числом ***p***, где ***p*** - простое число. Тогда в строках и столбцах таблицы будут всречаться все числа от 1 до ***p***-1.Среди них найдется число ***b***, при этом ***b=ak*** (по построению таблицы), т.е. существует ***k*** которое и является решением уравнения. Итак, если размер таблицы - простое число ***p***, то уравнение ***ax=b (mod p)*** имеет единственное решение при любых ***a*** и ***b.*** Это решение можно найти по таблице.

2. Теперь пусть главное число таблицы ***n*** - составное.

Утверждение 3. Пусть Н.О.Д.(***a, n***)=***c>1***. Тогда уравнение ***ax=1 (mod n)*** не имеет решения.

Доказательство. Пусть ***ax=1 (mod n).*** Тогда ***1=ax+kn (k-*** целое***)***, т.е. ***1*** должна делиться на ***c*** - противоречие.

Утверждение.4. Пусть Н.О.Д(***a, n***)=***c>1***. Тогда

1. $\exists x$ такое, что
   1) $x \neq 0 \pmod n$
   2) ***ax=0 (mod n)***
2. $\exists k \exists l$ такое, что $k \neq l$ и ***ak=al***

Доказательство этого утверждения не приводим.

Пример. Пусть ***n=12, a=8.*** Тогда Н.О.Д(***a, n***)=***c = 4.***

1.Уравнение

$$8x=1 \ (mod\ 12)$$

не имеет решений, т.к. ни при каком ***k*** не выполняется равенство

$$8x=1+12k$$

2. При ***x=3*** выполнено:

$$8*3=24=0 \ (mod\ 12)$$

3. Для любого ***k*** выполнено: ***8*k =8(k+3) (mod 12)*** Например,

$$8\cdot 2 = 16 = 8\cdot 5=40 \ (mod\ 12))$$

Утверждение 5. Пусть Н.О.Д (a, n)=1. Тогда уравнение ***ax=1 (mod n)*** имеет решение

Консультанты - М. Ройтберг, О. Четверина.

Примечание консультанта. Авторы сделали еще ряд интересных наблюдений. Например, они подметили симметрию таблиц умножения отнлсительно обеих диагоналей (что соответствует соотношениям **x·y = y·x(mod n) и x·y = (n-x) ·(n-y) (mod n**). Авторы также доказали (частично - с помощью консультантов) большинство из замеченных свойств. К сожалению, недостаток времени и опыта не позволил авторам включить эти результаты в настоящую работу. М.Р.

Игра “Раскрась полоску”

Илья Менделеев, Николай Сизых

<u>Правила игры .</u>
Есть поле - полоса из N клеток. Играют двое . Ходят по очереди. За один ход можно закрасить одну клетку или две рядом стоящие . Выигрывает тот, кто закрашивает последнюю клетку.
<u>Стратегия.</u>
При любой длине полоски (с четным или нечетным числом клеток) при правильной игре выигрывает первый . Первым ходом игрок 1 должен закрасить середину полоски (1 клетка,
если N нечетно и 2 клетки если N четно). В дальнейшем , игрок 1 закрашивает симметричные клетки (относительно середины полоски) тем ,которые закрасил игрок 2.
Когда игрок 2 зкрашивает последнюю клетку с одной стороны от центра, игрок 1 следующим ходом закрашивает последнюю клетку с другой стороны . Она еще не закрашена ,так как игрок 1 всегда закрашивает симметричные клетки. Тем самым игрок 1 выигрывает.
<u>Усложненная игра.</u>
Вместо полосы рассматриваем поле размером M*N . Правила остаются без изменений.
<u>Стратегия.</u>
Если M и N четные, то выигрывает игрок 2, делая центрально симметричные ходы . В этом случае игрок 1 не может перввым ходом занять центр поля. Если же хотя бы одно из M и N нечетно, то выигрывает игрок 1 , так как первым ходом он может закрасить цетр ,а потом ходить центрально симметрично.

Золотые числа.

Долгушина Ксеня, Сазонова Татьяна, Фрейдман Анастасия, Шарих Наталья

Консультант: Антон Борисюк

Золотые числа - это числа, квадрат которых оканчивается на это же число. Например:

$6^2=36$ $5^2=25$ $1^2=1$

Нашей целью было найти как можно больше золотых чисел, найти способ нахождения всех таких чисел.

Однозначные золотые числа были найдены подбором. Нашлось только 4 таких числа:

$0^2=0$ $1^2=1$ $5^2=25$ $6^2=36$

Подбирая золотые числа, обнаружилось, что золотые числа не могут заканчиваться на

2, 3, 4, 7, 8, 9, т.к. при возведении в квадрат у таких чисел меняется последняя цифра. Например:

$32^2=1024$

32^2 можно представить как

$(10k+2)^2=100k^2+40k+4=10(10k^2+4)+4$

Последняя цифра квадрата будет 4 ,т.е. двойка сменится на 4. Аналогично с остальными цифрами.

Подбором установлено, что существует только два двузначных золотых числа. Это

$25^2=625$ $76^2=376$

Далее было установлено, что в конце трехзначных золотых должно стоять двузначное золотое число.

Доказательство:

Пусть n - трехзначное золотое число,

a - его первая цифра(сотни), z - двузначное золотое число в конце. Например, для числа n=625 - a=6, z=25. Очевидно,

$$n=100a+z \qquad (1)$$

Имеем:

$$n^2=(100a+z)^2=10000a^2+200az+z^2=$$
$$=100(100a^2+2az)+z^2 \qquad (2)$$

Т.к. n - золотое число, то последние 3 (а значит и 2) цифры n^2 будут такие же, как в числе n. По формуле (1) видно, что последние две цифры в числе n^2 будут такие же, как в числе z^2.

Как найти число по заданному количеству делителей и наоборот.

Владимир Леонтьев (ξ), Анастасия Чагина (ν)

Перед многими ,изучающими делимость натуральных чисел, встает вопрос: как найти число делителей для заданного натурального **N?** Сформулируем более точно указанную проблему, разделив ее на две основных задачи.

<u>Прямая задача:</u>
Пусть задано число

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ - простые числа.,
Сколько делителей имеет данное число?

<u>Обратная задача:</u>
Для заданного **К** указать все числа ***n***, такие, что

$$\mathbf{d(n)=K}$$

Примечание. Функцией **d(n)** обозначается количество делителей числа **n**.

Решая прямую задачу, мы перебирали числа, смотрели количество их делителей, замечали закономерности и в итоге вывели ряд теорем.

<u>Теорема 1.</u> Если число n можно представить в виде

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ - простые числа, то количество делителей данного числа равно

$$(a_1 +1) \cdot (a_2 +1) \ldots \cdot (a_k +1)$$

Доказательство: Любой делитель числа

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$$

можно представить в виде произведения степеней простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$.
Показатель всякого простого числа p_i может меняться от 0 до a_i , то есть может принимать a_i +1 значение.
В силу основной теоремы арифметики, любой делитель однозначно можно представить в виде произведения степеней простых чисел.
Следовательно, всякому делителю соответствует ровно одна комбинация показателей степеней чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

По правилу произведения, всего таких комбинаций будет
$(a_1 +1) \cdot (a_2 +1) \ldots \cdot (a_k +1)$, что и требовалось доказать.

Пример. Рассмотрим количество делителей числа 72. Разложим его на простые множители: $72 = 2^3 \cdot 3^2$. Следовательно для количества d(72) делителей числа 72 получаем:

$$d(72)= (3+1) \cdot (2+1) = 4 \cdot 3 =12$$

Вот эти делители (они перечислены парами, дающими при перемножении 72): 72, 1, 36, 2, 24, 3, 18, 4, 12, 6, 9, 8.

Переходим к решению обратной задачи. Для этого мы выведем еще одну теорему.

<u>Теорема 2.</u> Чтобы найти числа, которые будут иметь N делителей, нужно взять произвольное разложение числа N на множители (необязательно простые). Тогда если $N= n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$, то число L, равное

$$L= p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$$

,где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ - простые простые числа, будет иметь ровно N делителей.

Доказательство: рассмотрим некоторое число L, записываемое в виде $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, где $p_1, p_2, \ldots, p_k$ - простые числа. Тогда, по *T1*, для количества делителей числа L получаем:

$$d(L) = (n_1-1)+1) \cdot (n_2-1)+1) \cdot \ldots \cdot (n_k-1)+1) =$$
$$= n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k= N.$$

Пример. Пусть требуется найти число, имеющее 15 делителей. Возможно два разложения числа 15 на множители: (1) $15 = 15 \cdot 1$;
(2) $15 = 3 \cdot 5$. Значит, возможны две формулы для чисел с 15 делителями: (1) $L = p^{14}$; (2) $L = p^2 \cdot q^4$ (p, q - простые числа). Наименьшим среди таких чисел будет число $3^2 \cdot 2^4$.

Консультанты: С. Бабенышев, М. Ройтберг.

Благодарности. Авторы благодарят Сергея Бабенышева и Михаила Ройтберга за помощь и поддержку.

Движение.

1.1мы взяли правильный треугольник (все углы которого равны$\alpha=60^0$).
Для этого треугольника мы взяли 6*движений-6* способов перевести треугольник в себя не растягивая и не разрезая его на части:
А)Поворот на угол $\alpha=0^0$-φ_0
Б) Поворот на угол $\alpha=120^0$ по часовой стрелке- φ_-
В) Поворот на угол $\alpha=120^0$ против часовой стрелке-φ_+
Г) Осевая симметрия относительно высоты АН-S_A
Д) Осевая симметрия относительно высоты AH_1-SB
Е) Осевая симметрия относительно высоты AH_2-SC*

Обозначим вершины треугольника А, В, С. Значит при совершении одного из шести движений вершины А, В, С переходят друг в друга или остаются на своем месте.
Пример:

Для наглядного представления