ЕГЭ по информатике

М.А. Ройтберг

mroytberg@lpm.org.ru,

ege-go.ru

31 февраля 2017

Конференция 1С, Москва

ПРИНЦИПЫ

- Минимизировать риск случайных ошибок
- Дать преимущество тем, кто «в теме»: задача имеет «лобовое» решение, но имеет и красивое, менее трудоемкое
- Анти-натаскивание:

  - вариативность заданий относительно демо-версии;

  - лучшая подготовка – знать курс информатики
- Наличие заданий разной сложности (в том числе – простых)

1. Общие сведения

ВСЕ, как в 2016 г. !!

Формат и количество заданий

«Зачет»: 6 баллов (2015)

8 баллов (2014 и ранее)

	2016/17	2015	2012
Выбор ответа (А)	*0*	*3*	*13*
Краткий ответ (В)	*23*	*20*	*15*
Развернутый ответ (С)	*4*	*4*	*4*
Всего	*27*	*27*	*32*

Уровень сложности
«Зачет»: 6 баллов

	2016/17	2015	2012
Базовый	12	12	13
Повышенный	11 (5+6)	11 (5+6)	15
Высокий	4	4	4
Всего	27	27	32

Темы заданий

	2016/17	2012	2011
Математические основы информатики	11	13	16
Алгоритмы	11	12	9
Технологии	5	7	7
Всего	27	32	32

Темы и уровни сложности

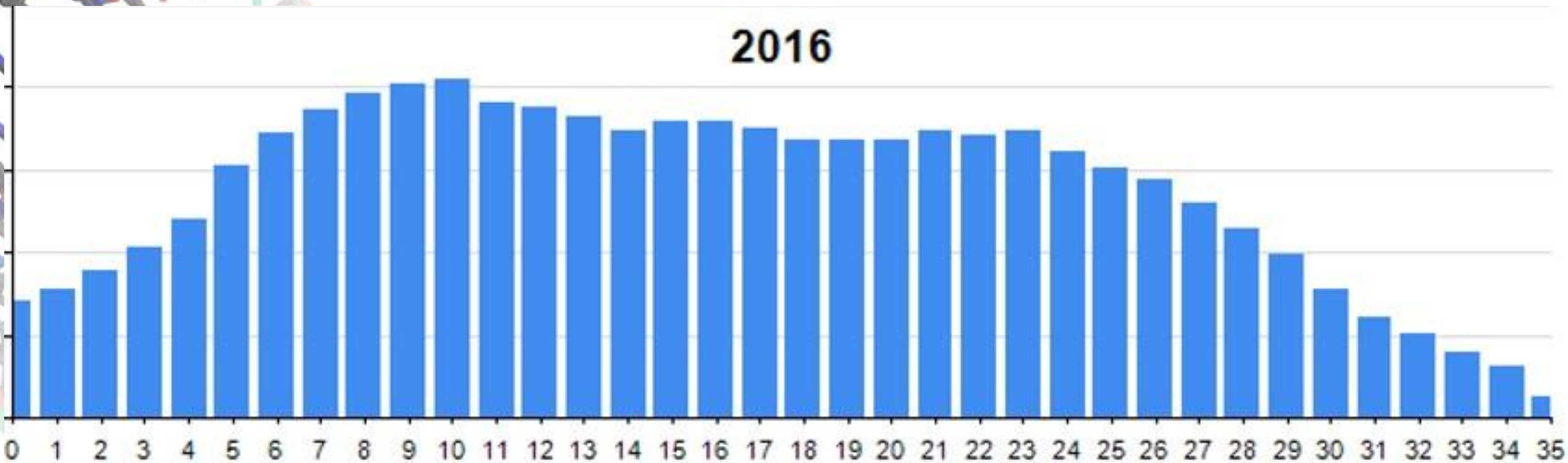
	Высо-кий	Повы-шенный	Базо-вый	Всего
Математичес-кие основы информатики	*2*	*4*	*5*	11
Алгоритмы	*2*	*6*	*3*	11
Технологии	*0*	*1*	*4*	5
Всего	4	11	12	

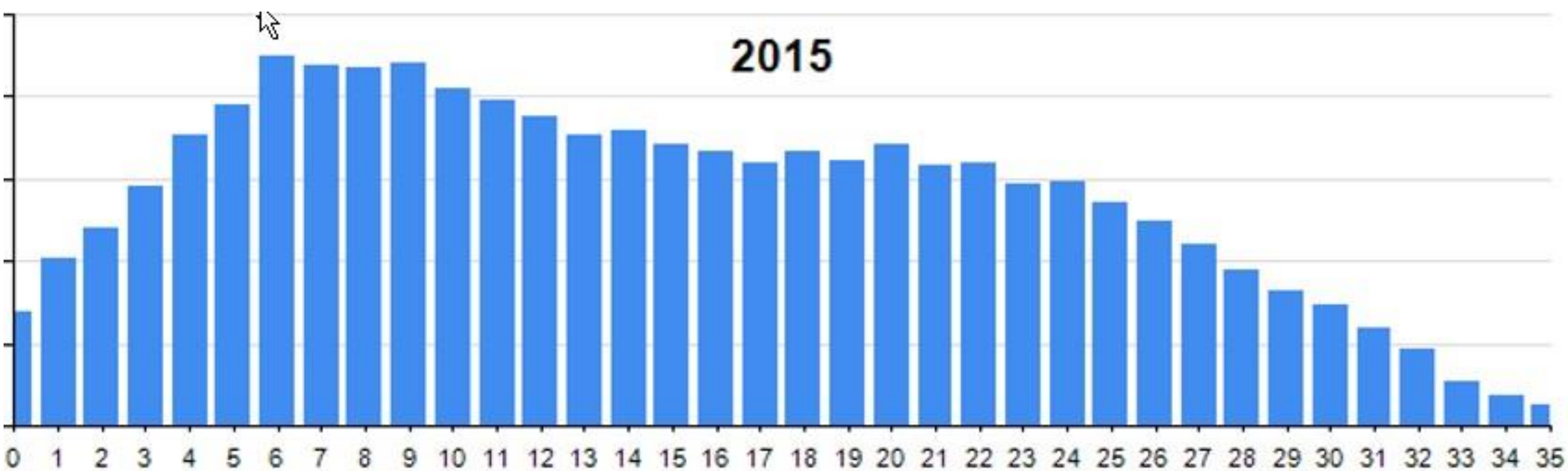
Двойные позиции

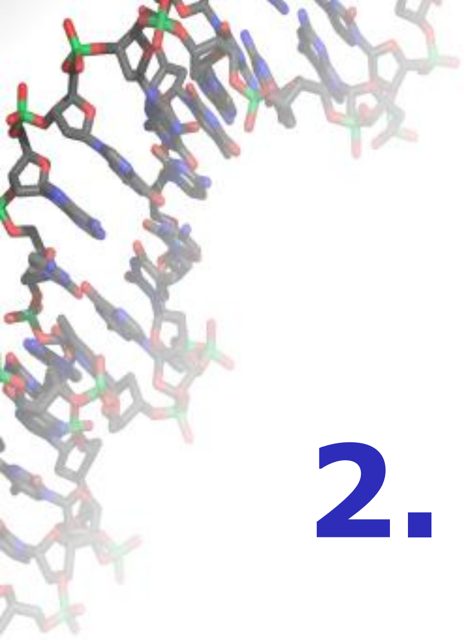
№ в КИМ 2016	№2014		Темы	
	X	Y	X	Y
3	А4	А6	БД	Маски файлов
6	А5	В1	Анализ алгоритма	Линейная програма для исполнителя
7	А7	В3	Эл.таб. - формулы	Эл.таб. - диаграммы
9	А8	В10	Дискрети-зация	Передача данных

Результаты 2014 - 2016

Год	Сред. тест. балл	Диапазон тестовых баллов				
		0-20	***21-40***	***41-60***	***61-80***	***81-100***
2016	56,63	6,89	9	38,11	36,16	9,84
2015	53,99	8,75	11,85	38,57	32,63	8,21
2014	57,79	4,16	8,9	41,93	37,86	7,15


2016
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35


2015
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35



2. Математические основы информатики

Математические основы информатики

- ***Комбинаторика***
- ***Кодирование (в том числе - биты, байты)***
- ***Системы счисления***
- ***Графы, деревья, списки***
- ***Логика***

Математические основы

№ в КИМ	Уровень сложности	Тип	Тема
10	Б	А	Комбинаторика
11	Б	В	Кодирование - неравномерные коды
13	П	В	Кодирование - равномерные коды, биты, байты
4	Б	В	Системы счисления – двоичная
16	П	В	Системы счислкения - общего вида
5	Б	В	Графы - матрица смежности.
15	П	В	Графы - подсчет числа путей
2	Б	А	Логика - таблицы истинности
18	П	В	Логика – преобр. лог. выражений
23	В	В	Логика - системы уравнений
25	В	С	Стратегии

2.1. Комбинаторика

	X	Y	Z
A	AX	AY	AZ
B	BX	BY	BZ
C	CX	CY	CZ
D	DX	DY	DZ

Количество пар: $P = N_1 * N_2$

Количество троек: $T = N_1 * N_2 * N_3$

Количество слов длины k в алфавите из N букв:

$$W(N, k) = \underbrace{N * \ldots * N}_{k\ \text{раз}} = N^k$$

Формулы перемножения и сложения количества вариантов.

Количество текстов данной длины в данном алфавите.

Перестановки, размещения и сочетания.

2.1. Комбинаторика

Все 4-буквенные слова, составленные из букв К, Л, Р, Т, записаны
в алфавитном порядке и пронумерованы.
Вот начало списка:
1. КККК
2. КККЛ
3. КККР
4. КККТ

……
Запишите слово, которое стоит под номером **67**

2.1. Комбинаторика

Все 4-буквенные слова, составленные из букв К, Л, Р, Т, записаны в алфавитном порядке и пронумерованы.

Вот начало списка:

1. КККК
2. КККЛ
3. КККР
4. КККТ

……

Запишите слово, которое стоит под номером **67**

Идея решения:

Количество слов длины 2 в 4-буквенном алфавите: $4x4 = 4^2 = 16$

Количество слов длины 3 в 4-буквенном алфавите: $4x4x4 = 4^3 = 64$

2.1. Комбинаторика

Все 4-буквенные слова, составленные из букв К, Л, Р, Т, записаны в алфавитном порядке и пронумерованы.

Вот начало списка:

1. КККК
2. КККЛ
3. КККР
4. КККТ

……

Запишите слово, которое стоит под номером **67**

Идея решения:

Количество слов длины 2 в 4-буквенном алфавите: $4 \times 4 = 4^2 = 16$

Количество слов длины 3 в 4-буквенном алфавите: $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$

Количество слов длины 4, которые начинаются с К: $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$

65- е слово: ЛККК

2.1. Комбинаторика

Все 4-буквенные слова, составленные из букв К, Л, Р, Т, записаны в алфавитном порядке и пронумерованы.

Вот начало списка:

1. КККК
2. КККЛ
3. КККР
4. КККТ

……

Запишите слово, которое стоит под номером **67**

Идея решения:

Количество слов длины 2 в 4-буквенном алфавите: $4x4 = 4^2 = 16$

Количество слов длины 3 в 4-буквенном алфавите: $4x4x4 = 4^3 = 64$

Количество слов длины 4, которые начинаются с К: $4x4x4= 4^3=64$

65-е слово: ЛККК

66-е слово: ЛККЛ

67-е слово: ЛККР

2.1. Комбинаторика

(№10) Игорь составляет таблицу кодовых слов для передачи сообщений, каждому сообщению соответствует своё кодовое слово. В качестве кодовых слов Игорь использует 5-буквенные слова, в которых есть только буквы П, И, Р, причём буква П появляется ровно 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в кодовом слове любое количество раз или не встречаться совсем. Сколько различных кодовых слов может использовать Игорь?

2.1. Комбинаторика

Игорь составляет таблицу кодовых слов для передачи сообщений, каждому сообщению соответствует своё кодовое слово. В качестве кодовых слов Игорь использует 5-буквенные слова, в которых есть только буквы П, И, Р, причём буква П появляется ровно 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в кодовом слове любое количество раз или не встречаться совсем. Сколько различных кодовых слов может использовать Игорь?

Идея решения

Есть 4 «шаблонов» кодового слова – в зависимости от того, где стоит П: Пxxxx; xПxxx; xxПxx; xxxПx; xxxxП

На месте x может стоять либо И, либо Р. Поэтому каждому шаблону соответствует $2^4 = 16$ возможных кодовых слов. А всем 5 шаблонам соответствует 5*16 = 80 слов.

2.1. Комбинаторика

Игорь составляет таблицу кодовых слов для передачи сообщений, каждому сообщению соответствует своё кодовое слово. В качестве кодовых слов Игорь использует 5-буквенные слова, в которых есть только буквы П, И, Р, причём буква П появляется ровно 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в кодовом слове любое количество раз или не встречаться совсем. Сколько различных кодовых слов может использовать Игорь?

Идея решения

Есть 4 «шаблонов» кодового слова – в зависимости от того, где стоит П: Пxxxx; xПxxx; xxПxx; xxxПx; xxxxП

На месте x может стоять либо И, либо Р. Поэтому каждому шаблону соответствует $2^4 = 16$ возможных кодовых слов. А всем 5 шаблонам соответствует 5*16 = 80 слов.

!!! Одно слово не может соответствовать двум шаблонам –

!!! - буква П в слове ровно одна.

2.2. Кодирование – 1

(двоичные тексты, биты, байты равномерные коды

- Алфавит - конечное множество символов. Текст — произвольная последовательность символов данного алфавита. **Двоичные тексты.**
- **Единицы измерения длины двоичных текстов (бит, байт, производные единицы). Шестнадцатеричное представление двоичных текстов.**
- **Битовые операции с двоичными текстами**
- **Посимвольное кодирование текста. Кодовое слово. Кодовая таблица. Декодирование. Посимвольное равномерное двоичное кодирование текста.** 7-битная кодовая таблица ASCII; 8-битные кодовые таблицы для кодирования текстов, включающих символы латиницы и кириллицы. Стандарт Unicode.

2.2. Кодирование - 1

ПРИМЕР **(№13)**

- При регистрации в компьютерной системе каждому пользователю выдаётся пароль, состоящий из 15 символов и содержащий только символы Ш, К, О, Л, А (таким образом, используется 5 различных символов). Каждый такой пароль в компьютерной системе записывается минимально возможным и одинаковым целым количеством байт (при этом используют посимвольное кодирование и все символы кодируются одинаковым и минимально возможным количеством бит).
- Укажите объём памяти в байтах, отводимый этой системой для записи 30 паролей.

Кодирование - 2

- Неравномерное кодирование. Возможность однозначного декодирования. Префиксные коды. Условие Фано.
- Код, обеспечивающий по возможности меньшую среднюю длину сообщения при известной частоте символов.
- Коды, исправляющие ошибки.

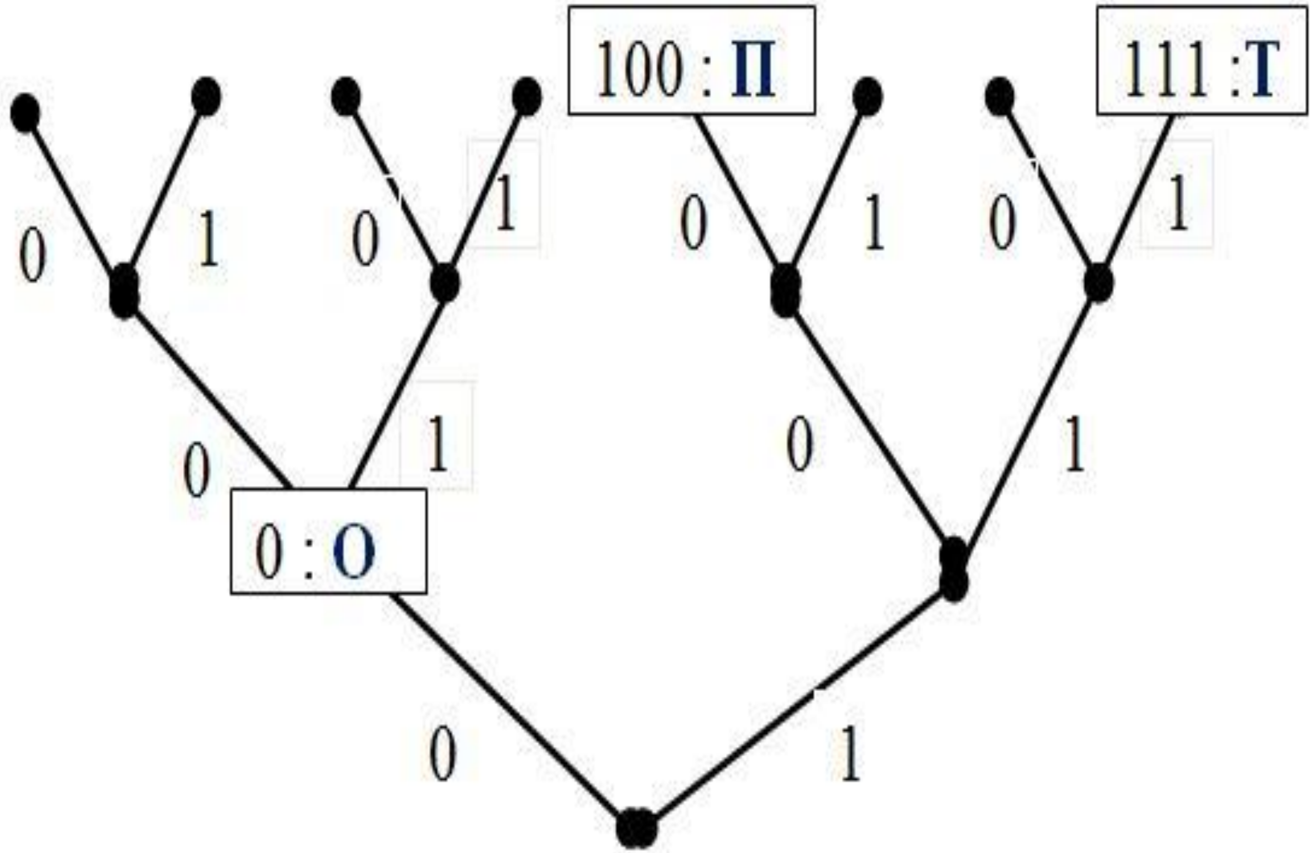
Кодирование - 2

- Неравномерное кодирование. Возможность однозначного декодирования. Префиксные коды. Условие Фано.

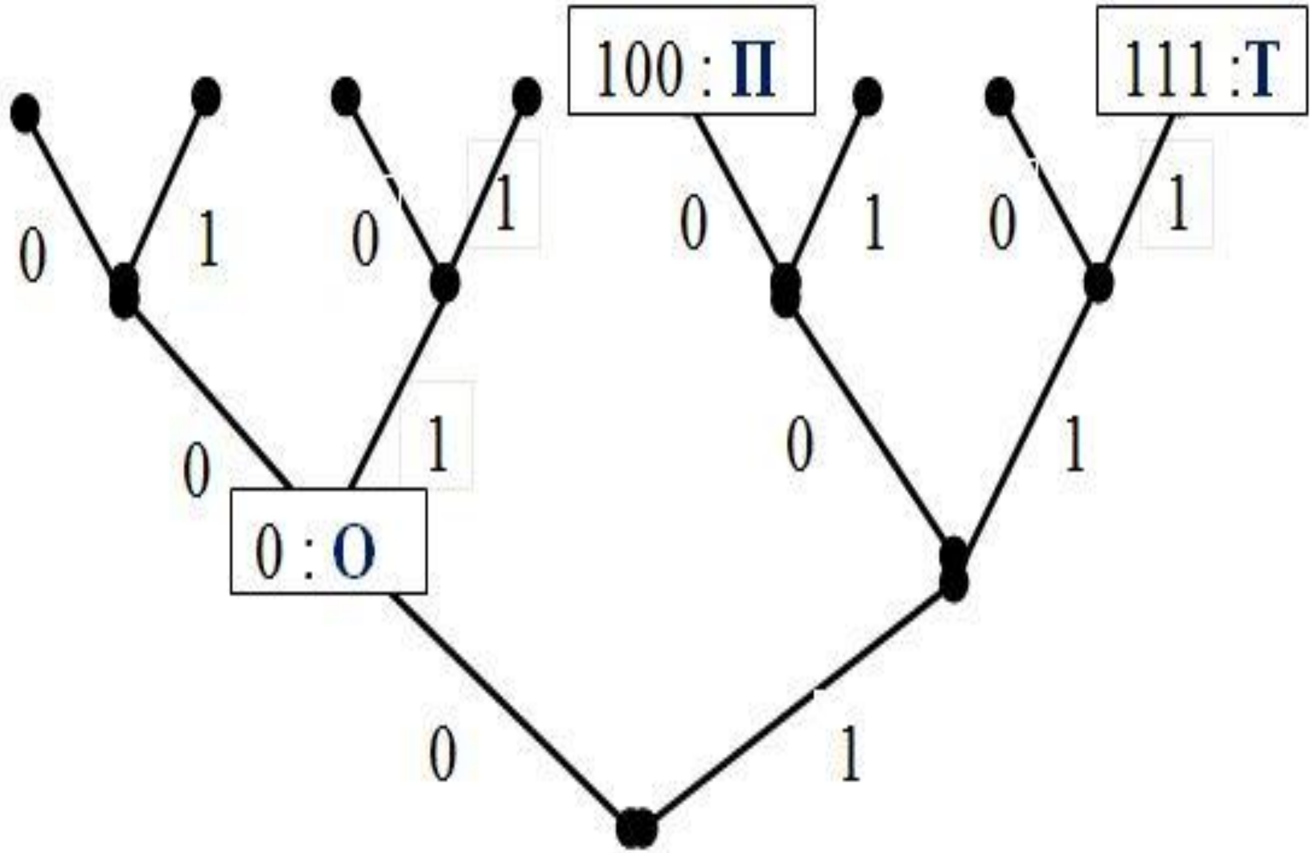
ПРИМЕР **(№5)**

- По каналу связи передаются сообщения, содержащие только четыре буквы:
  П, О, С, Т; для передачи используется двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для букв Т, О, П используются такие кодовые слова: Т: 111, О: 0, П: 100.
- Укажите кратчайшее кодовое слово для буквы С, при котором код будет допускать однозначное декодирование. Если таких кодов несколько, укажите код с наименьшим числовым значением.
- Примечание. Условие Фано означает, что ни одно кодовое слово не является началом другого кодового слова.

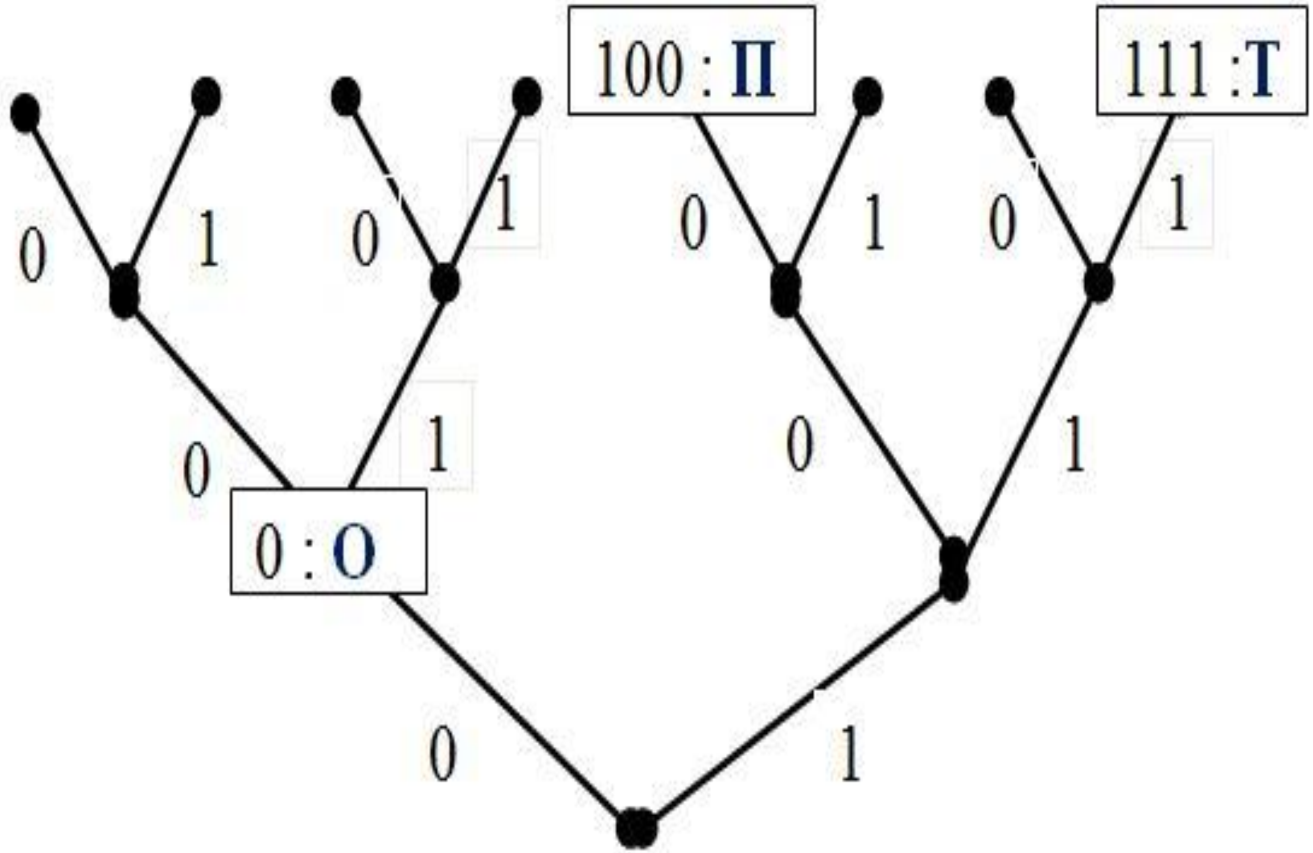
О – 0; П – 100; Т – 111; С – ?



О – 0; П – 100; Т – 111; С – ?

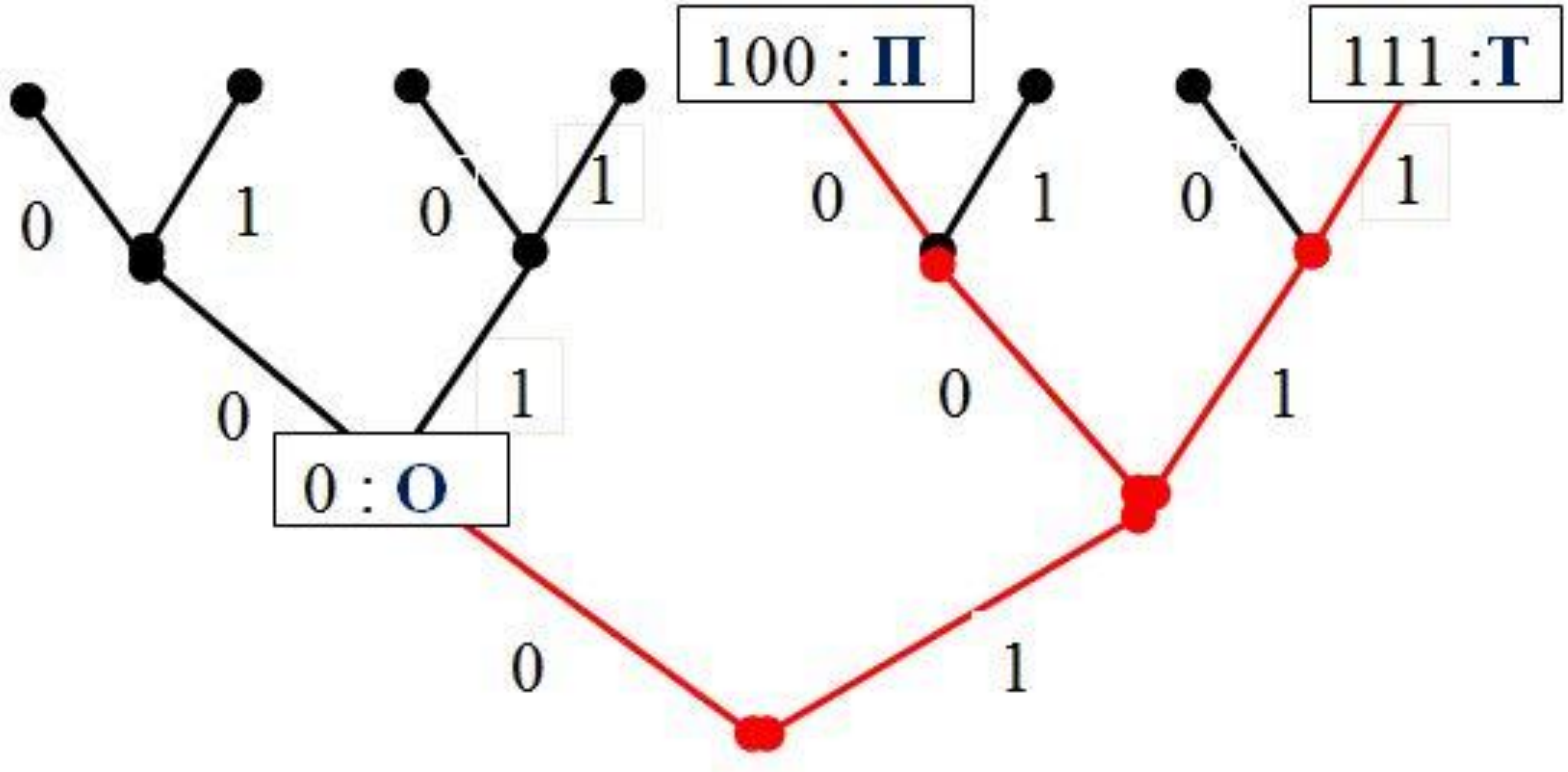


О – 0; П – 100; Т – 111; С – ?



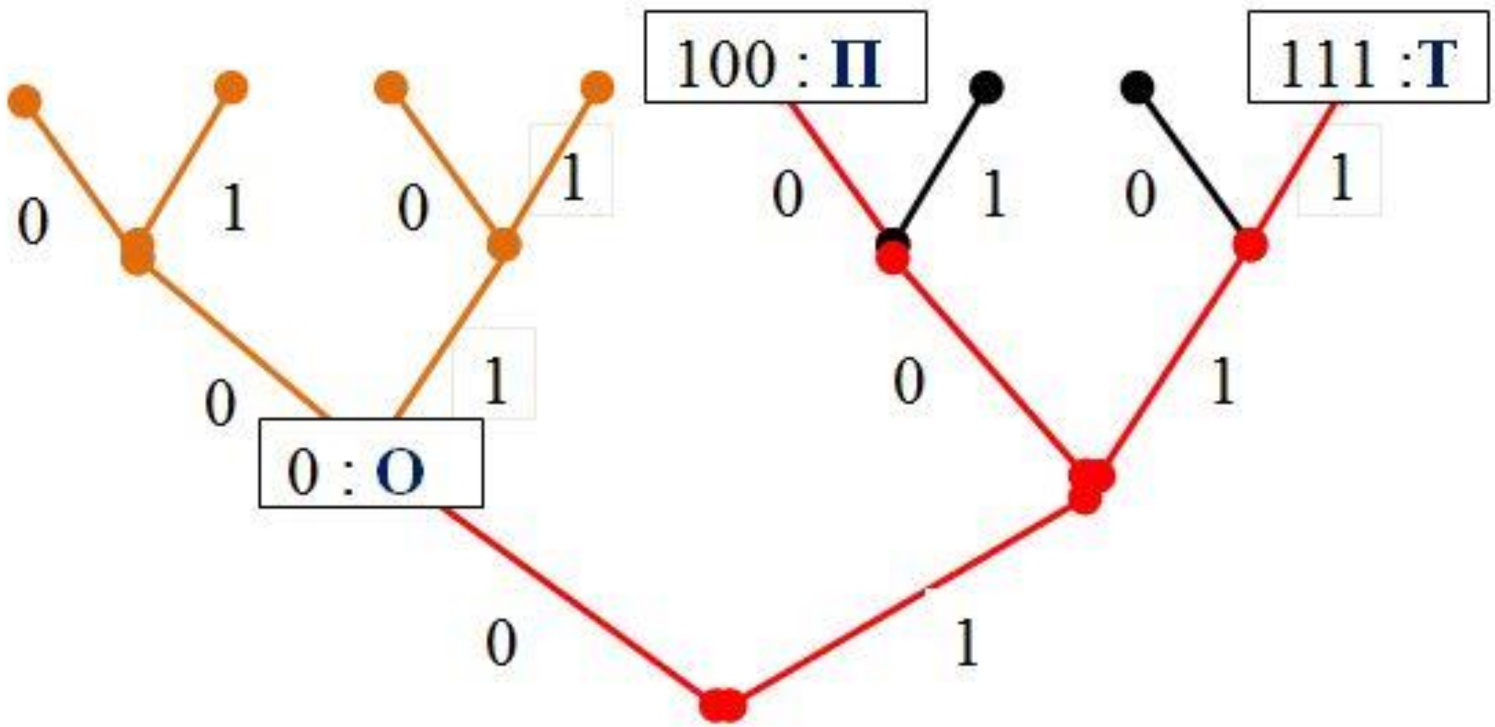
Условие Фано: ни одно кодовое слово не является началом другого кодового слова.

О – 0; П – 100; Т – 111; С – ?



Условие Фано: ни одно кодовое слово не является началом другого кодового слова. **НАЧАЛА КОДОВЫХ СЛОВ ЗАПРЕЩЕНЫ !**

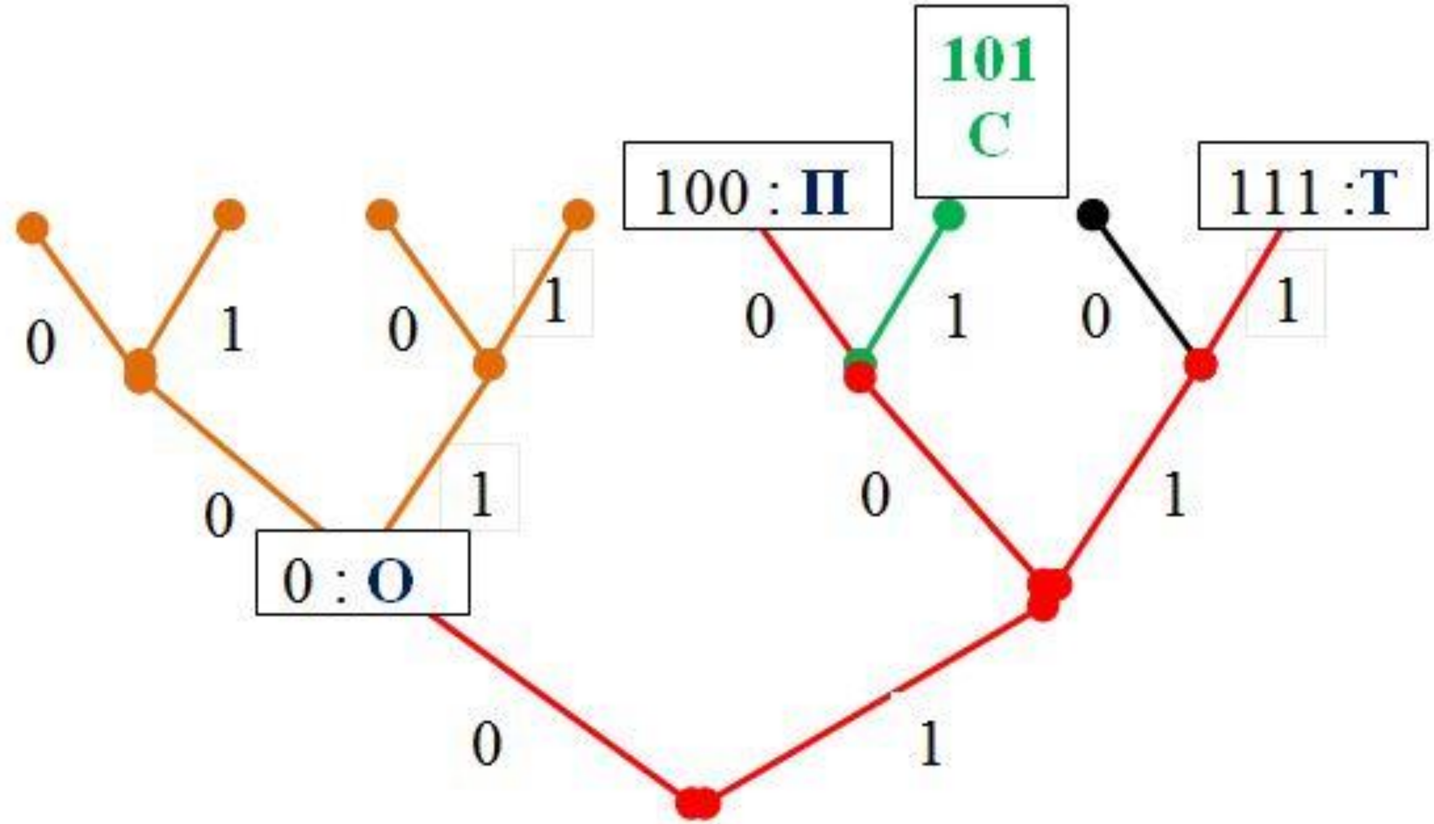
О – 0; П – 100; Т – 111; С – ?



Условие Фано: ни одно кодовое слово не является началом другого кодового слова. **НАЧАЛА КОДОВЫХ СЛОВ ЗАПРЕЩЕНЫ !**

ПРОДОЛЖЕНИЯ КОДОВЫХ СЛОВ ТОЖЕ ЗАПРЕЩЕНЫ

О – 0; П – 100; Т – 111; С – ?

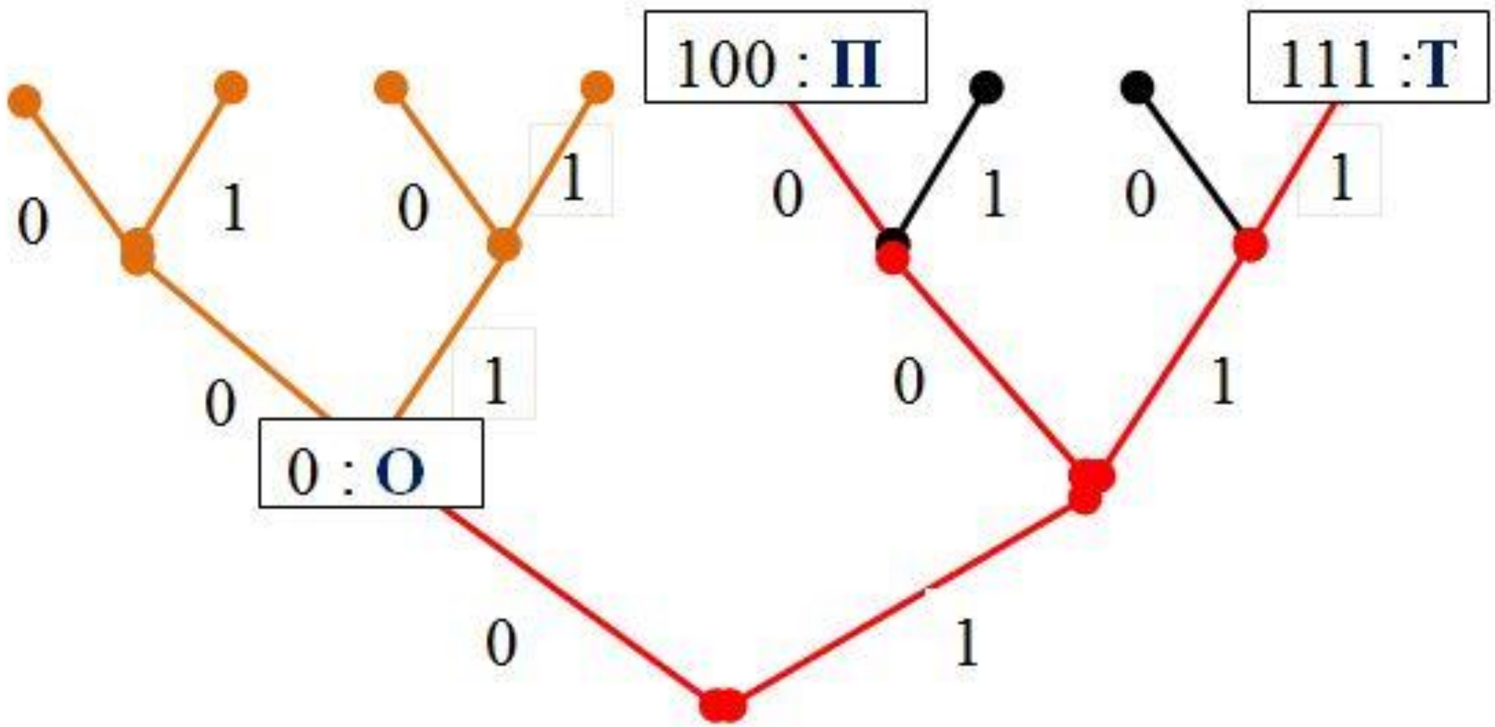


Условие Фано: ни одно кодовое слово не является началом другого кодового слова. **НАЧАЛА КОДОВЫХ СЛОВ ЗАПРЕЩЕНЫ !**
ПРОДОЛЖЕНИЯ КОДОВЫХ СЛОВ ТОЖЕ ЗАПРЕЩЕНЫ

Еще пример

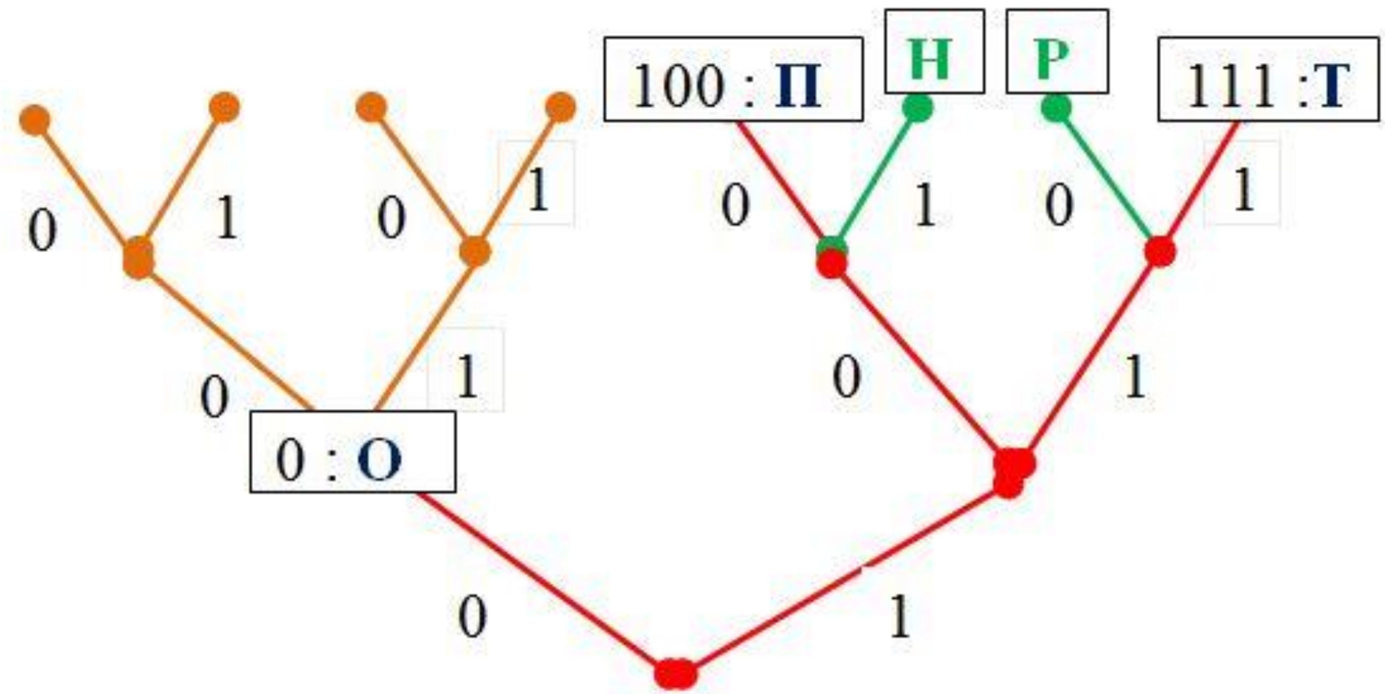
- По каналу связи передаются сообщения, содержащие только **шесть** букв: **Н,** П, О, **Р, С,** Т; для передачи используется двоичный код, удовлетворяющий условию Фано. Для букв Т, О, П используются такие кодовые слова: Т: 111, О: 0, П: 100.
- Какова минимальная общая длина кодовых слов для всех шести букв?
- Примечание. Условие Фано означает, что ни одно кодовое слово не является началом другого кодового слова.

О – 0; П – 100; Т – 111; Н, Р, С – ?



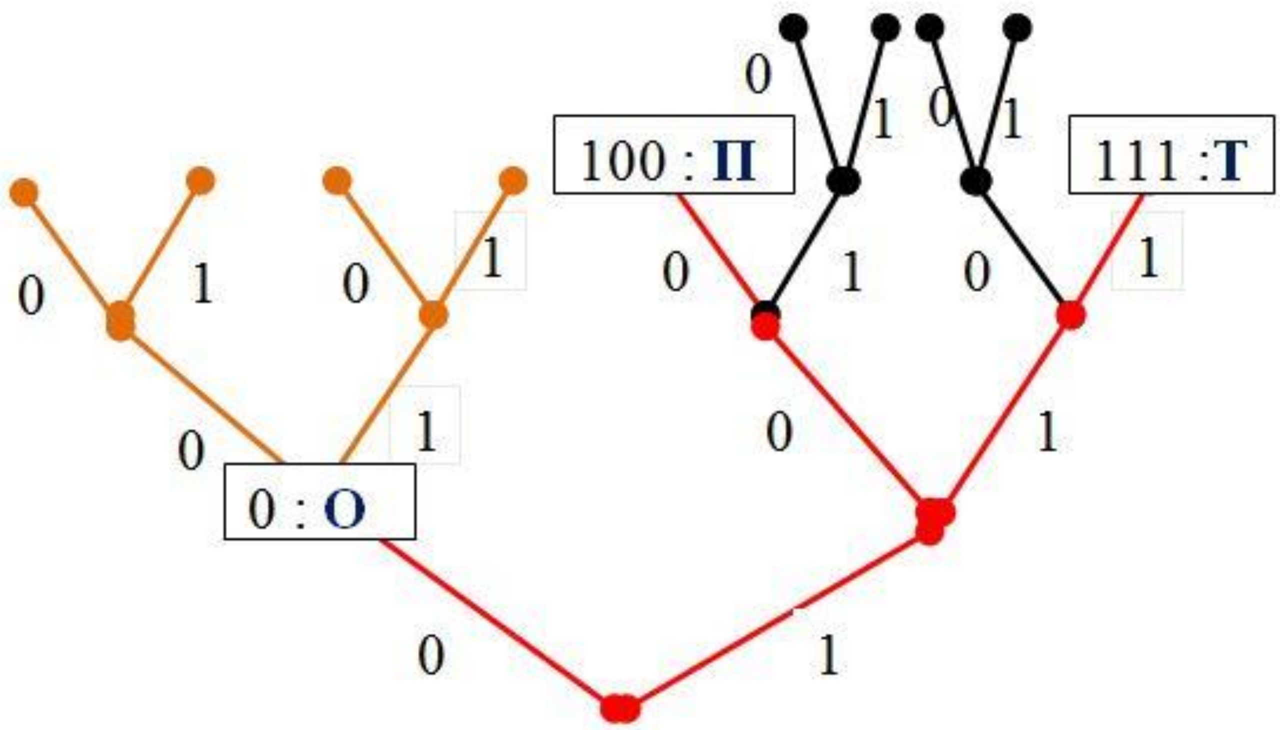
Условие Фано: ни одно кодовое слово не является началом другого кодового слова. **НАЧАЛА КОДОВЫХ СЛОВ ЗАПРЕЩЕНЫ !**
ПРОДОЛЖЕНИЯ КОДОВЫХ СЛОВ ТОЖЕ ЗАПРЕЩЕНЫ

О – 0; П – 100; Т – 111; Н, Р, С – ?



Условие Фано: ни одно кодовое слово не является началом другого кодового слова. **НАЧАЛА КОДОВЫХ СЛОВ ЗАПРЕЩЕНЫ !**
ПРОДОЛЖЕНИЯ КОДОВЫХ СЛОВ ТОЖЕ ЗАПРЕЩЕНЫ

О – 0; П – 100; Т – 111; Н, Р, С – ?

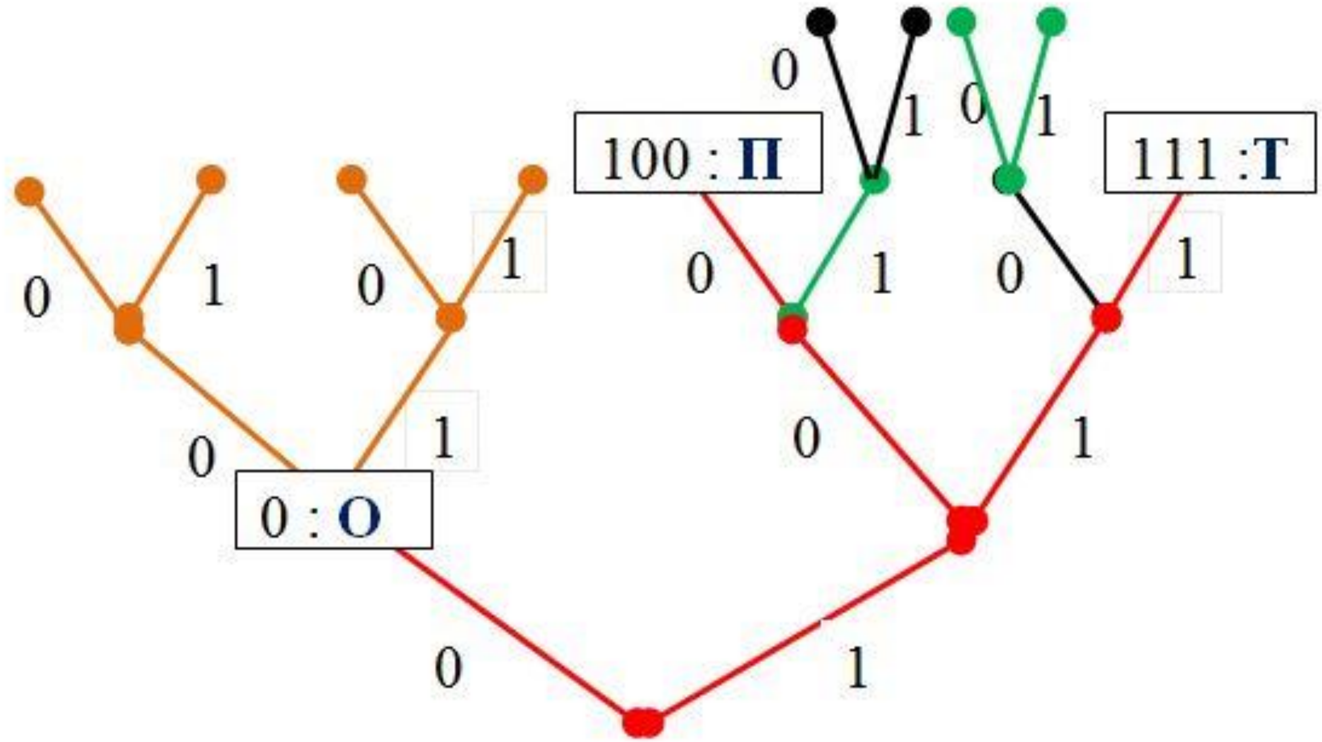


Условие Фано: ни одно кодовое слово не является началом другого кодового слова. **НАЧАЛА КОДОВЫХ СЛОВ ЗАПРЕЩЕНЫ !**

ПРОДОЛЖЕНИЯ КОДОВЫХ СЛОВ ТОЖЕ ЗАПРЕЩЕНЫ

- Если использовать для кодирования 6 символов равномерный код, то можно обойтись длиной в 3 бита для каждого кодового слова, то есть тогда сумма длин всех 6 слов будет 18, при этом останется 2 неиспользуемых кодовых слова той же длины. Данный неравномерный код окажется экономным только в том случае, если сигнал преимущественно будет состоять из буквы О. Это применимо, например, к работе охранной системы, которая в обычном режиме подает сигнал о своей исправности и отсутствии угроз (сигнал О).
- Данное задание оказалось неожиданно сложным даже для сильных выпускников, получивших высокие тестовые баллы. При решении этого конкретного задания верный ответ дали 41,2% экзаменовавшихся, ответ «20» дали 18,5% участников экзамена.

О – 0; П – 100; Т – 111; Н, Р, С – ?

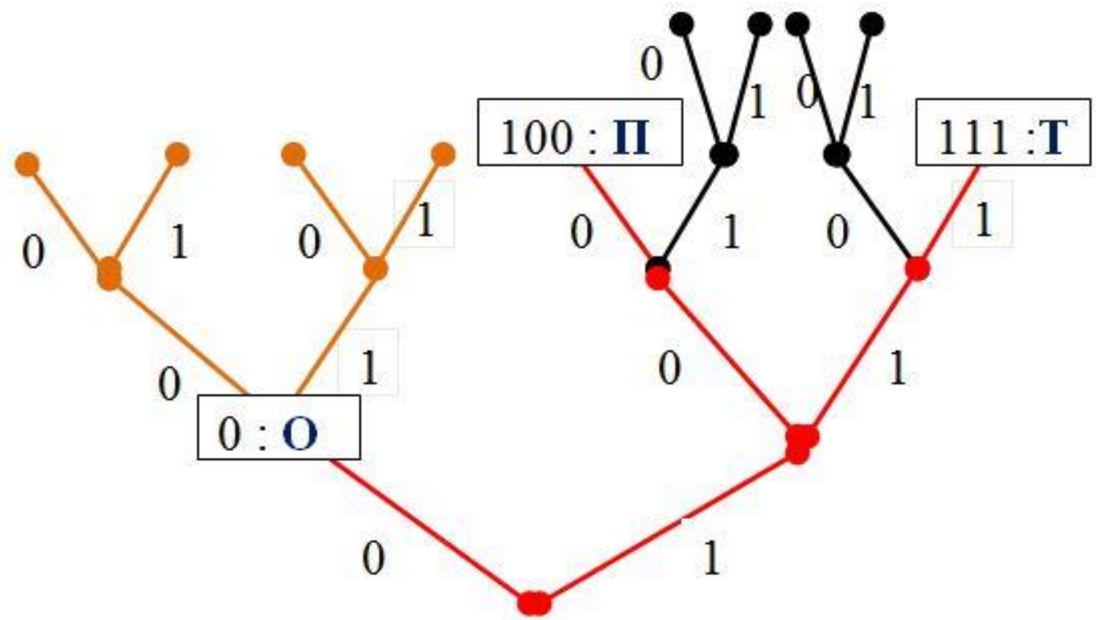


Длины кодовых слов: 1 + 3 + 3 + **3 + 4 + 4** = **18**

Упражнения:

1) О – 0; П – 100; Т – 111; Н, Р, С, Т – ?

2) О – 0; П – 100; Т – 111; Н, Р, С, Т, У – ?



Длины кодовых слов: 1 + 3 + 3 +???

2.3. Системы счисления -1 (основание 2, 8, 16)

Запись натуральных чисел в 2-чной системе. Запись натуральных чисел в 8-чной и 16-чной системе. Сложение и вычитание натуральных чисел, записанных в двоичной системе счисления. Перевод чисел из двоичной системы в системы счисления с основанием 8 и 16 и обратно. Задание целых чисел с помощью дополнительного двоичного кода.

ПРИМЕР (**№1**).

Сколько единиц в двоичной записи десятичного числа 519?

2.3. Системы счисления -1 (основание 2, 8, 16)

Запись натуральных чисел в 2-чной системе. Запись натуральных чисел в 8-чной и 16-чной системе. Сложение и вычитание натуральных чисел, записанных в двоичной системе счисления. Перевод чисел из двоичной системы в системы счисления с основанием 8 и 16 и обратно. Задание целых чисел с помощью дополнительного двоичного кода.

ПРИМЕР (**№1**).

Сколько единиц в двоичной записи десятичного числа 519?

Идея решения: 519 = 512+7 = 1000000000 +111 – 4 единицы.

Можно просто переводить в 2-чную систему, но это дольше ☺

Системы счисления -2 (позиционные системы счисления общего вида)

Запись натуральных чисел в позиционной системе с заданным основанием. Сложение и вычитание натуральных чисел, записанных в позиционной системе счисления. Свойства позиционной записи (примеры: количество цифр в записи числа, ноль в конце записи).

ПРИМЕР 1 (демо).

Сколько единиц содержится в двоичной записи значения выражения:

$$\mathbf{4^{2014} + 2^{2015} - 8}$$

ПРИМЕР 2

Десятичное число 57 в некоторой системе счисления записывается как 212. Определите основание системы счисления

Системы счисления -2 (позиционные системы счисления общего вида)

Запись натуральных чисел в позиционной системе с заданным основанием. Сложение и вычитание натуральных чисел, записанных в позиционной системе счисления. Свойства позиционной записи (примеры: количество цифр в записи числа, ноль в конце записи).

ПРИМЕР 1 (демо-2015).

Сколько единиц содержится в двоичной записи значения выражения:

$$\mathbf{4^{2014} + 2^{2015} - 8}$$

ПРИМЕР 2

Десятичное число 57 в некоторой системе счисления записывается как 212. Определите основание системы счисления

- 1. *Четные числа оканчиваются на 0, нечетные – на 1.*
- *2. Число 2^k в двоичной системе счисления записывается единицей и k нулями. Например, 32 = 2^5 в двоичной системе счисления записывается так: 100000*
- *3. Число N делится на 2^k <===> число N оканчивается на k нулей*
- *4. Число 2^k – 1 в двоичной системе счисления записывается k единицами. Например, 31 = 2^5 – 1 в двоичной системе счисления записывается так: 11111*
- *5.* ***Двоичная запись числа N содержит ровно k цифр***

тогда и только тогда,

$$\mathbf{2^{k-1} \le N \le 2^k - 1}$$

p-чная система счисления

- 1. *Последняя цифра числа – остаток от деления на p.*

- *2. Число p^k записывается единицей и k нулями. Например, 243 = 3^5 в троичной системе счисления записывается так: 100000*
- *3. Число N делится на p^k <===> число N оканчивается на k нулей*
- *4. Число p^k – 1 в двоичной системе счисления записывается k наибольшими цифрами (цифрами, обозначающими p-1). Например, 16^5 – 1 в шестнадцатеричной системе счисления записывается так: FFFFF.*
- *5.* ***p-чная запись числа N содержит ровно k цифр***

тогда и только тогда,

$$\boldsymbol{p^{k-1} \le N \le p^k - 1}$$

2.3. Дискретные объекты (списки, деревья, графы)

- **Список. Первый элемент, последний элемент. Предыдущий элемент, следующий элемент. Замена, вставка и удаление элемента.**
- **Дерево. Вершина, корень, лист, Поддерево. Предыдущая вершина. Следующие вершины. Бинарное дерево. Высота дерева.** Частичный порядок на множестве вершин. Генеалогическое дерево. Префиксное дерево.
- **Граф. Вершина, ребро, путь. Ориентированные и неориентированные графы. Начальная вершина (источник) и конечная вершина (сток) в ориентированном графе. Веса ребер. Вес пути. Понятие минимального пути. Матрица смежности (с весами ребер).** Расстояние между вершинами. Диаметр графа

2.3. Дискретные объекты (списки, деревья, графы)

- **Граф. … Веса ребер. Вес пути. Понятие минимального пути. Матрица смежности (с весами ребер).**
- ПРИМЕР 1

Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F, G построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет.

	A	B	C	D	E	F	G
A		5		12			25
B	5			8			
C				2	4	5	10
D	12	8	2				
E			4				5
F			5				5
G	25		10		5	5	

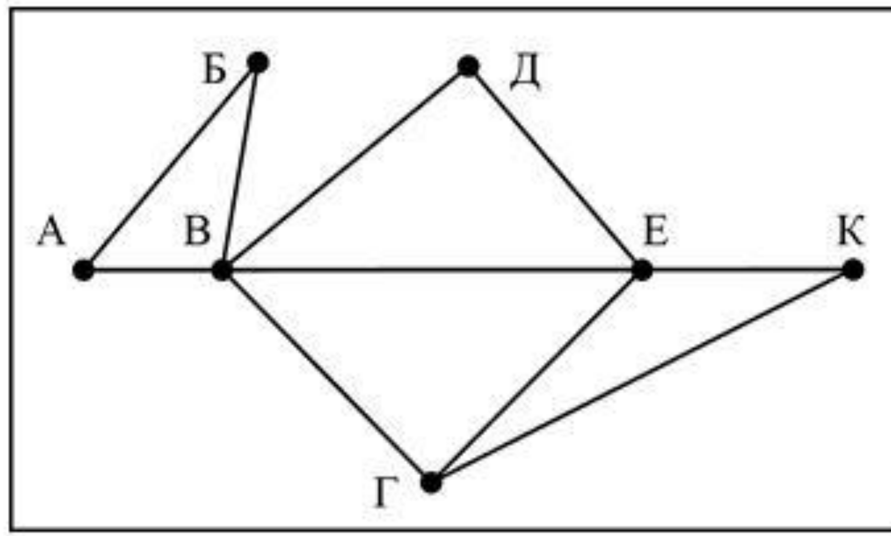
Определите длину кратчайшего пути между пунктами A и G (при условии, что передвигаться можно только по построенным дорогам).

2.3. Дискретные объекты (списки, деревья, графы)

- ПРИМЕР 2 **(№ 3)**

На рисунке справа схема дорог Н-ского района изображена в виде графа, в таблице содержатся сведения о длинах этих дорог (в километрах).

	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7
П1		45		10			
П2	45			40		55	
П3					15	60	
П4	10	40				20	35
П5			15			55	
П6		55	60	20	55		45
П7				35		45	



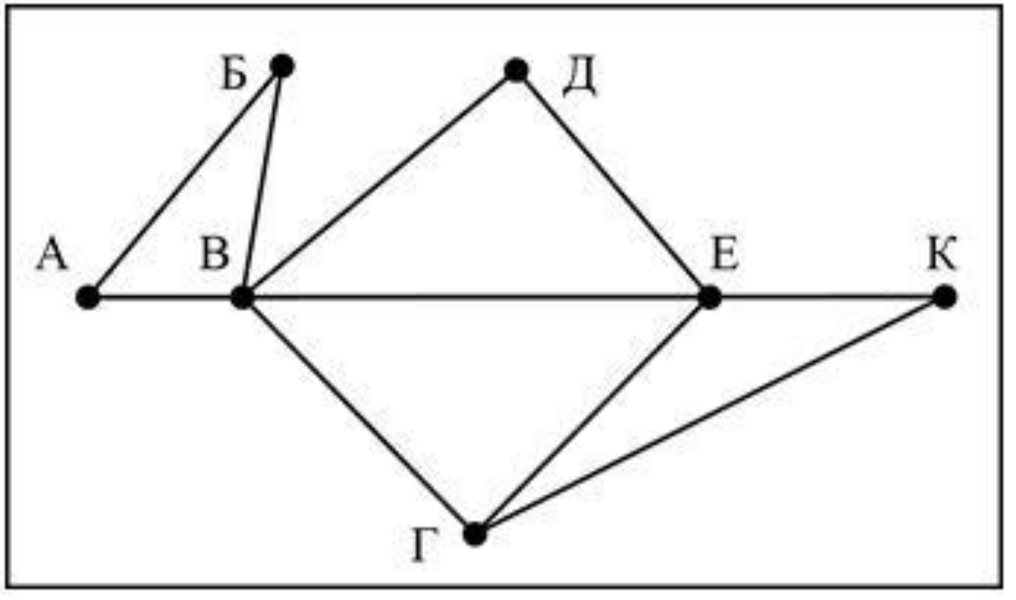
Так как таблицу и схему рисовали независимо друг от друга, то нумерация населённых пунктов в таблице никак не связана с буквенными обозначениями на графе. Определите, какова длина дороги из пункта В в пункт Е. В ответе запишите целое число – так, как оно указано в таблице.

2.3. Дискретные объекты (списки, деревья, графы)

- ПРИМЕР 2 **(№ 3)**

Граф	Соседи	Таблица	Соседи
А	2	П1	2
Б	2	П2	3
В	5	П3	2
Г	3	П4	4
Д	2	П5	2
Е	4	П6	5
К	2	П7	2

	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7
П1		45		10			
П2	45			40		55	
П3					15	60	
П4	10	40				20	35
П5			15			55	
П6		55	60	20	55		45
П7				35		45	

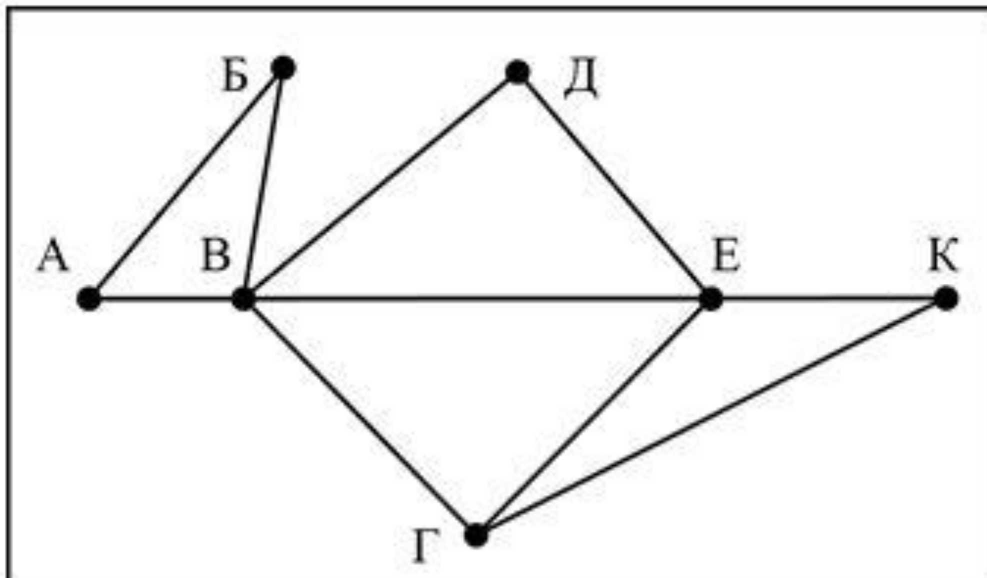


2.3. Дискретные объекты (списки, деревья, графы)

- ПРИМЕР 2 **(№ 3)**

Граф	Соседи	Таблица	Соседи
А	2	П1	2
Б	2	П2	3
В	5	П3	2
Г	3	П4	4
Д	2	П5	2
Е	4	П6	5
К	2	П7	2

	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7
П1		45		10			
П2	45			40		55	
П3					15	60	
П4	10	40				20	35
П5			15			55	
П6		55	60	20	55		45
П7				35		45	

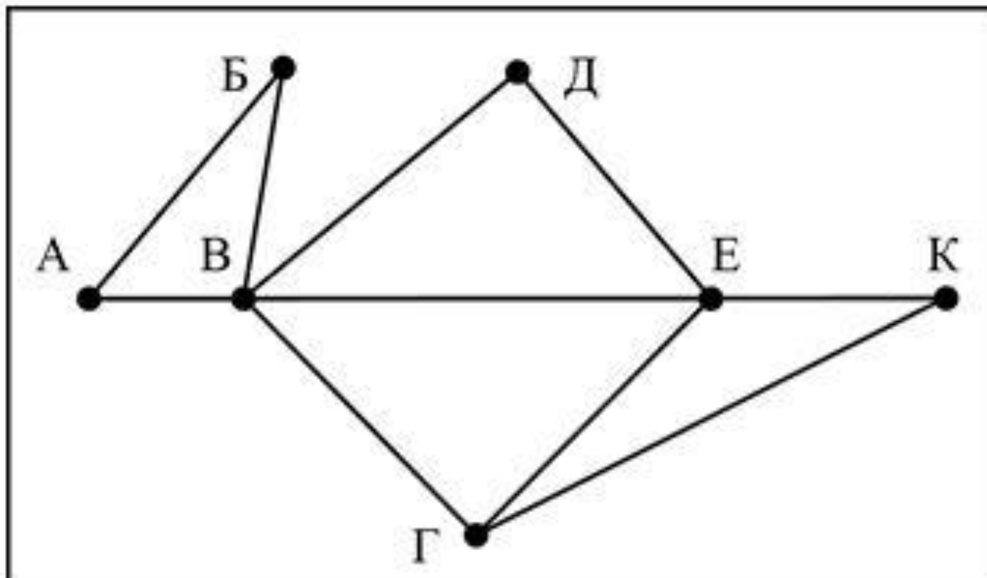


2.3. Дискретные объекты (списки, деревья, графы)

- ПРИМЕР 2 **(№ 3)**

Граф	Соседи	Таблица	Соседи
В	5	П6	5
Е	4	П4	4
Г	3	П2	3
А	2	П1	2
Б	2	П3	2
Д	2	П5	2
К	2	П7	2

	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7
П1		45		10			
П2	45			40		55	
П3					15	60	
П4	10	40				20	35
П5			15			55	
П6		55	60	20	55		45
П7				35		45	

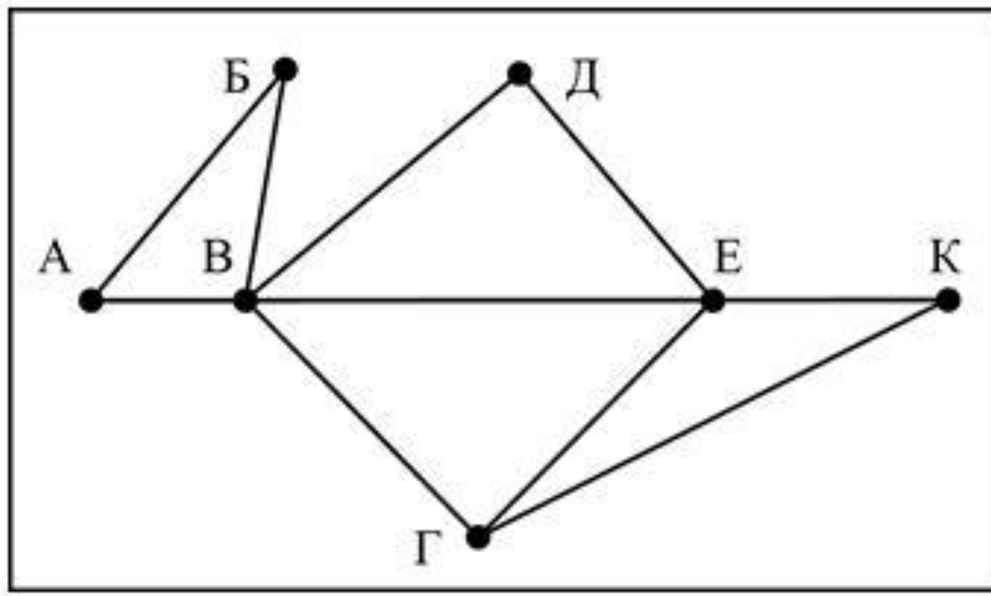


2.3. Дискретные объекты (списки, деревья, графы)

- ПРИМЕР 2 **(№ 3)**
- **ВЕ = 20**
- **ВГ = 55**
- **ГЕ = 40**

Граф	Соседи	Таблица	Соседи
В	5	П6	5
Е	4	П4	4
Г	3	П2	3
А	2	П1	2
Б	2	П3	2
Д	2	П5	2
К	2	П7	2

	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7
П1		45		10			
П2	45			40		55	
П3					15	60	
П4	10	40				20	35
П5			15			55	
П6		55	60	20	55		45
П7				35		45	

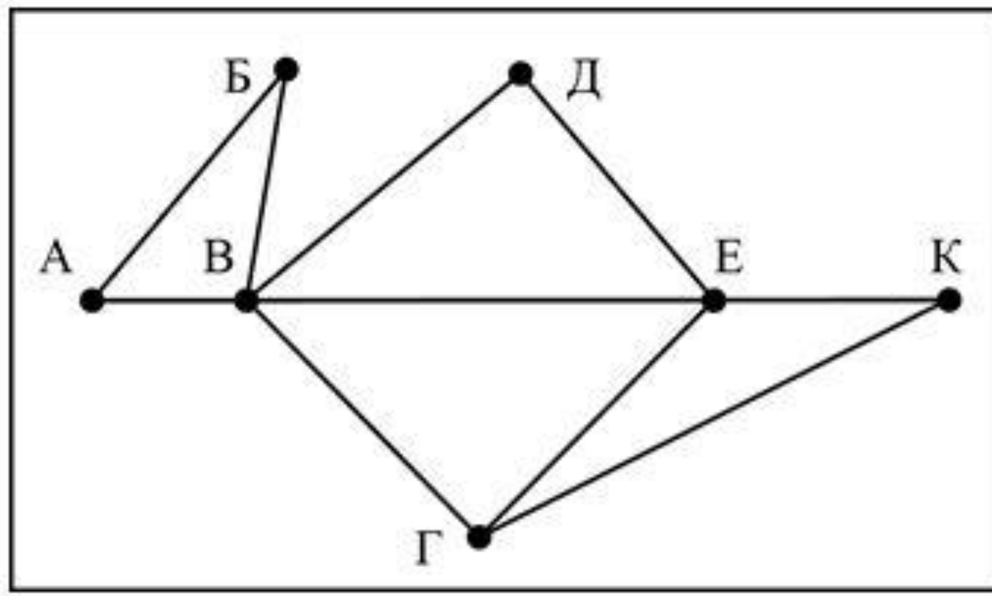


2.3. Дискретные объекты (списки, деревья, графы)

- ПРИМЕР 2 **(№ 3)**
- **Как различить**
- **А, Б, Д, К?**

Граф	Соседи	Таблица	Соседи
В	5	П6	5
Е	4	П4	4
Г	3	П2	3
А	2	П1	2
Б	2	П3	2
Д	2	П5	2
К	2	П7	2

	П1	П2	П3	П4	П5	П6	П7
П1		45		10			
П2	45			40		55	
П3					15	60	
П4	10	40				20	35
П5			15			55	
П6		55	60	20	55		45
П7				35		45	

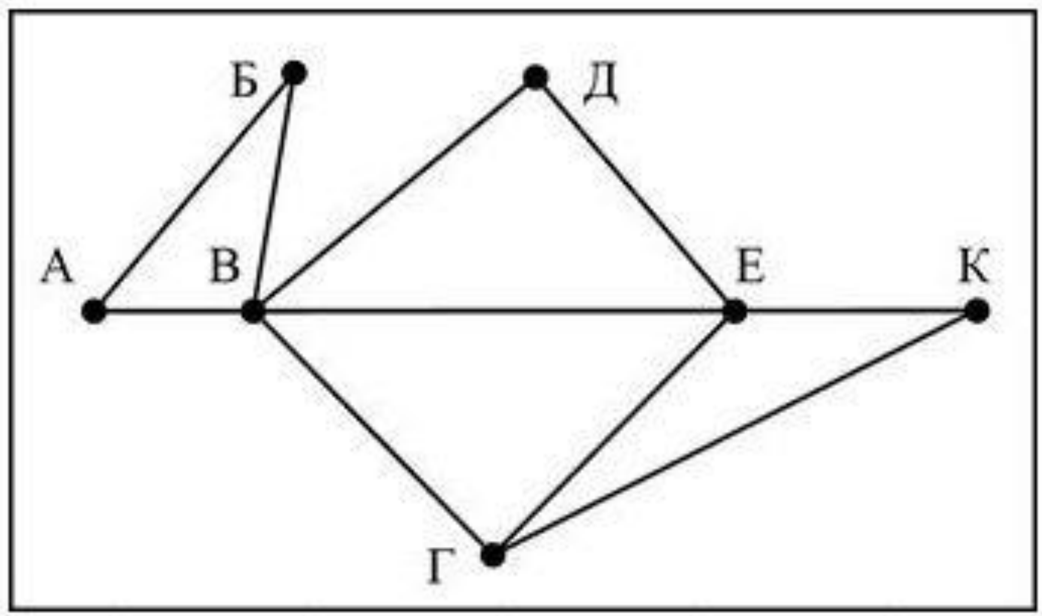


2.3. Дискретные объекты (списки, деревья, графы)

- ПРИМЕР 2 **(№ 3)**
- **Как различить**
- **А, Б, Д, К?**

Граф	Соседи	Таблица	Соседи
В	5	П6	5
Е	4	П4	4
Г	3	П2	3
А	2	П1	2
Б	2	П3	2
Д	2	П5	2
К	2	П7	2

	П1	Г	П3	Е	П5	В	П7
П1		45		10			
Г	45			40		55	
П3					15	60	
Е	10	40				20	35
П5			15			55	
В		55	60	20	55		45
П7				35		45	

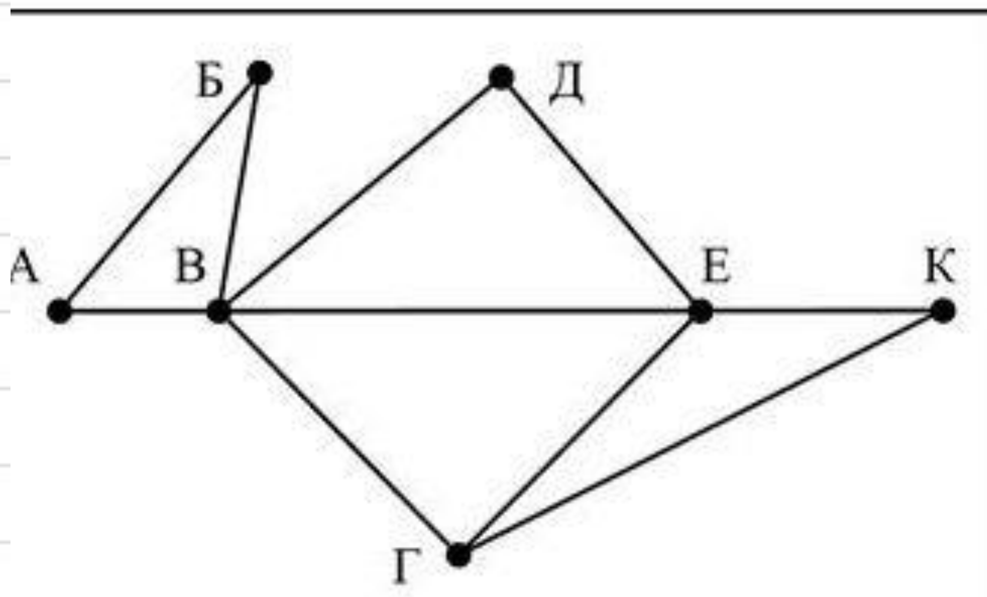


2.3. Дискретные объекты (списки, деревья, графы)

- ПРИМЕР 2 **(№ 3)**
- **Как различить**
- **А, Б, Д, К?**

Граф	Соседи	Таблица	Соседи
В	5	П6	5
Е	4	П4	4
Г	3	П2	3
А	2	П1	2
Б	2	П3	2
Д	2	П5	2
К	2	П7	2

		П1	Г	П3	Е	П5	В	П7
К	П1		45		10			
	Г	45			40		55	
А? Б?	П3					15	60	
	Е	10	40				20	35
А? Б?	П5			15			55	
	В		55	60	20	55		45
Д	П7				35		45	

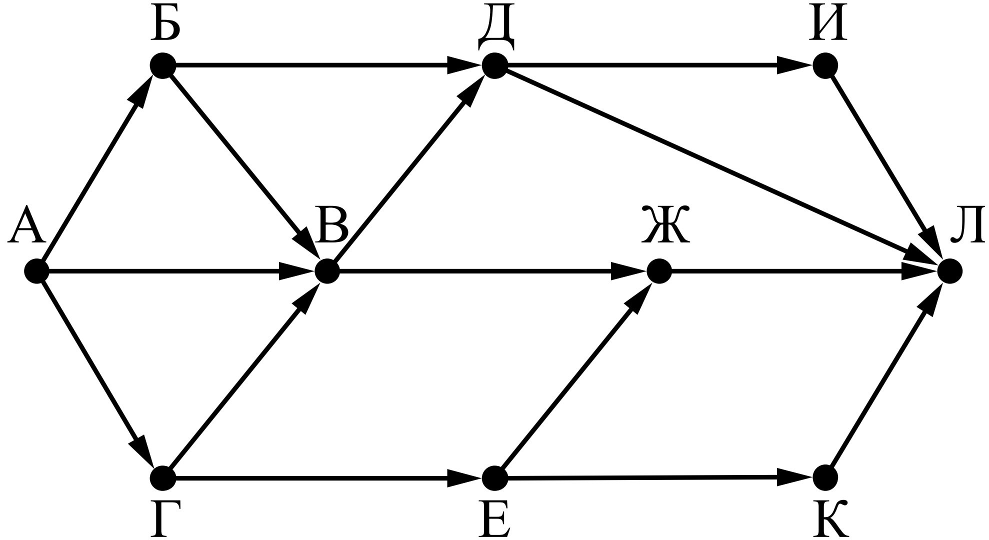


АБ = 15; АВ и БВ - ??

Дискретные объекты (списки, деревья, графы)

- **Граф. … Веса ребер. Вес пути. Понятие минимального пути. Матрица смежности (с весами ребер).**
- ПРИМЕР 2

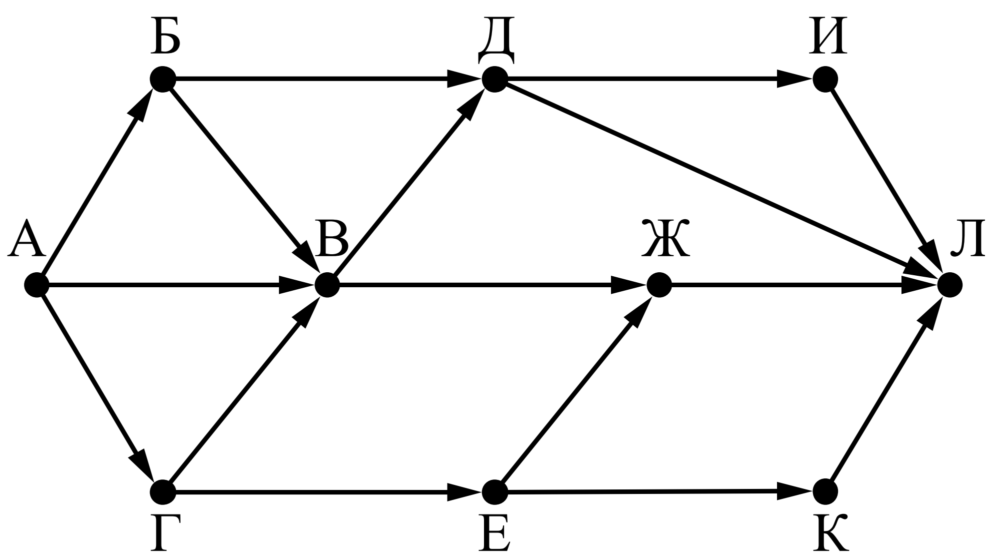
На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, Л. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Л?



Дискретные объекты (списки, деревья, графы)

- **Граф. … Веса ребер. Вес пути. Понятие минимального пути. Матрица смежности (с весами ребер).**
- ПРИМЕР 2

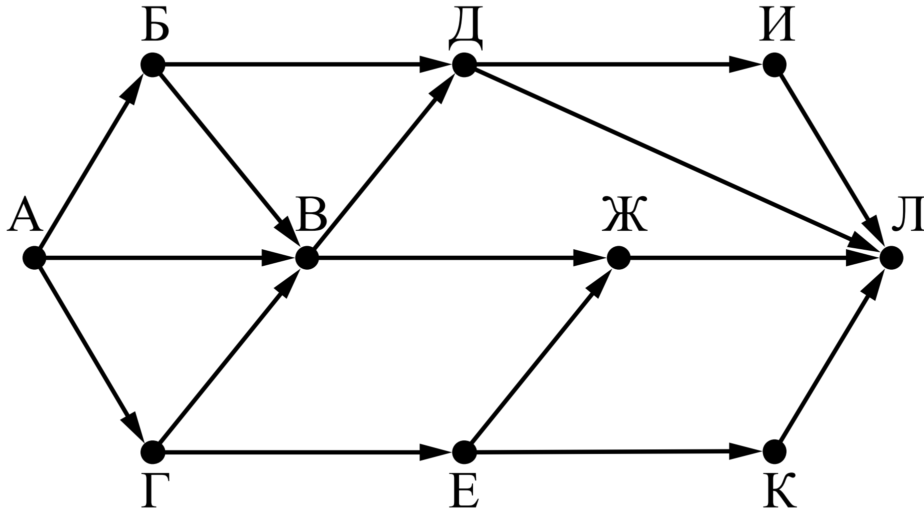
На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, Л. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Л?



Дискретные объекты (списки, деревья, графы)

- **Граф. … Веса ребер. Вес пути. Понятие минимального пути. Матрица смежности (с весами ребер).**
- ПРИМЕР 2 (усложненный)

На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, Л. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Л, **проходящих через В**?



Дискретные объекты (списки, деревья, графы)

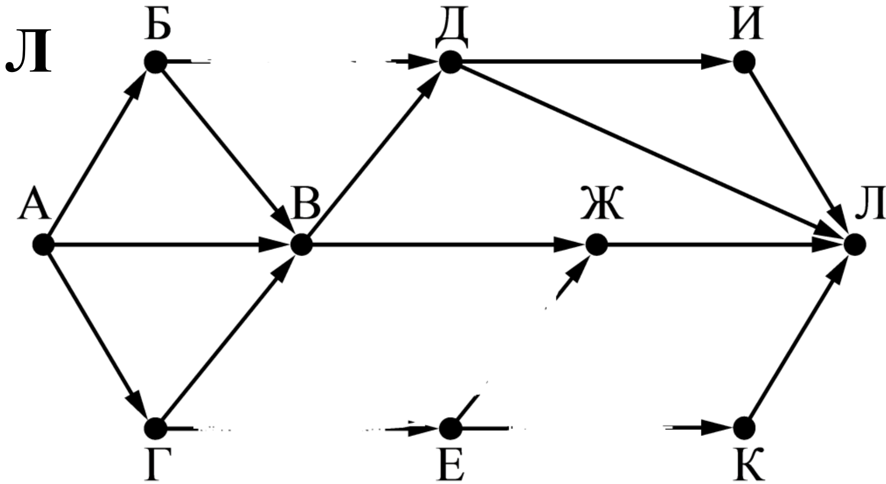
На рисунке – схема дорог, связывающих города А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, И, К, Л. По каждой дороге можно двигаться только в одном направлении, указанном стрелкой. Сколько существует различных путей из города А в город Л, **проходящих через В**?

N(АВЛ) = N(АВ)* N(ВЛ)

N(АВ) - количество путей из А в В

N(ВЛ) - количество путей из В в Л

N(АВЛ) - количество путей из А в Л через В



2.4. Логика

- Логические значения. Логические связки (операции): отрицание, дизъюнкция, конъюнкция, импликация. Логические (булевы) выражения, их истинность и ложность. Эквивалентные преобразования булевых выражений. Таблицы истинности.
- Высказывания, логические операции, кванторы, истинность высказывания

Логика. Пример-1

Александра заполняла таблицу истинности для выражения F. Она успела заполнить лишь небольшой фрагмент таблицы:

$x1$	$x2$	$x3$	$x4$	$x5$	$x6$	$x7$	$x8$	F
	0						1	0
1			0					1
			1				1	1

Каким выражением может быть F?

1) $x1 \land \neg x2 \land x3 \land \neg x4 \land x5 \land x6 \land \neg x7 \land \neg x8$
2) $x1 \lor x2 \lor x3 \lor \neg x4 \lor \neg x5 \lor \neg x6 \lor \neg x7 \lor \neg x8$
3) $\neg x1 \land x2 \land \neg x3 \land x4 \land x5 \land \neg x6 \land x7 \land x8$
4) $x1 \lor \neg x2 \lor x3 \lor \neg x4 \lor \neg x5 \lor \neg x6 \lor \neg x7 \lor \neg x8$

Логика-1. Таблицы истинности. Пример 2.

Логическая функция *F* задается выражением

$$(x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z).$$

На рисунке приведен фрагмент таблицы истинности функции *F*, содержащий **все** наборы аргументов, при которых функция *F* истинна.
Определите, какому столбцу таблицы истинности функции *F* соответствует каждая из переменных *x*, *y*, *z*.

Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
???	???	???	F
0	1	0	1
1	1	0	1
1	1	1	1

В ответе напишите буквы *x*, *y*, *z* в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы (сначала – буква, соответствующая 1-му столбцу, затем – буква, соответствующая 2-му столбцу и т.д.) Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно.

(x /\ y /\¬z) \/ (x /\ y /\ z) \/ (x /\¬y /\¬z)

	x	y	z
x Λ y Λ¬z	1	1	0
x Λ y Λ z	1	1	1
x Λ¬y Λ¬z	1	0	0
ВСЕГО	3	2	1

$(x \land y \land \lnot z) \lor (x \land y \land z) \lor (x \land \lnot y \land \lnot z)$

	x	y	z
$x \land y \land \lnot z$	1	1	0
$x \land y \land z$	1	1	1
$x \land \lnot y \land \lnot z$	1	0	0
ВСЕГО	**3**	**2**	**1**

	Пер.1	**Пер.2**	**Пер.3**
	0	1	0
	1	1	0
	1	1	0
ВСЕГО	**2**	**3**	**1**

$(x \land y \land \neg z) \lor (x \land y \land z) \lor (x \land \neg y \land \neg z)$

	x	y	z
$x \land y \land \neg z$	1	1	0
$x \land y \land z$	1	1	1
$x \land \neg y \land \neg z$	1	0	0
ВСЕГО	3	2	1

	Пер.1	Пер.2	Пер.3
	0	1	0
	1	1	0
	1	1	0
ВСЕГО	2	3	1

y **x** **z**

Как построить выражение с заданной таблицей истинности

- Для любого множества наборов значений переменных можно построить выражение, которое истинно на всех наборах из заданного множества и только на них. Это выражение удобно записать в виде дизъюнкции конъюнкций, причем в каждой конъюнкции
- а) каждый член – это простая переменная или ее отрицание;
- б) содержатся все переменные.

Логика – 2. Преобразование выражений. Интерпретация логических выражений.

На числовой прямой даны два отрезка: P = [37; 60] и Q = [40; 77]. Укажите наименьшую возможную длину такого отрезка A, что формула

$$(x \in \mathrm{P}) \to (((x \in \mathrm{Q}) \wedge \neg(x \in \mathrm{A})) \to \neg(x \in \mathrm{P}))$$

истинна при любом значении переменной *x*, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной *x*.

- ***Задание 18.1***
- Обозначим через $m\&n$ поразрядную конъюнкцию неотрицательных целых чисел m и n. Например, $14\&5 = 1110_2\&0101_2 = 0100_2 = 4$.
- Для какого наименьшего неотрицательного целого числа A формула

$$x\&25 \neq 0 \rightarrow (x\&17 = 0 \rightarrow x\&A \neq 0)$$

тождественно истинна (т.е. принимает значение 1 при любом неотрицательном целом значении переменной x)?

- Для какого наименьшего числа A формула

$$x\&25 \neq 0 \rightarrow (x\&17 = 0 \rightarrow x\&A \neq 0) \qquad (*)$$

тождественно истинна?

1. Выражения А → (В → С) и (А /\ В) → С равносильны. Поэтому $x\&25 \neq 0 \rightarrow (x\&17 = 0 \rightarrow x\&A \neq 0)$ равносильно выражению

$$(x\&25 \neq 0 \wedge x\&17 = 0) \rightarrow x\&A \neq 0.$$

2. Поскольку $25_{10} = 11001_2$, то $x \& 25 \neq 0$ означает, что или нулевой, или третий, или четвертый разряд в двоичной записи числа x не равен 0.
3. Т.к. 17 = 16+1, то $x \& 17 = 0$ означает, что нулевой и четвертый разряд в двоичной записи числа x равны 0.
4. Из $(x\&25 \neq 0 \wedge x\&17 = 0)$ следует, что третий разряд в двоичной записи числа x не равен 0.

- Для какого наименьшего числа *A* формула

$$x\&25 \neq 0 \rightarrow (x\&17 = 0 \rightarrow x\&A \neq 0) \qquad (*)$$

тождественно истинна?

1. Выражения A → (B → C) и (A /\ B) → C равносильны. Поэтому $x\&25 \neq 0 \rightarrow (x\&17 = 0 \rightarrow x\&A \neq 0)$ равносильно выражению

$$(x\&25 \neq 0 \wedge x\&17 = 0) \rightarrow x\&A \neq 0.$$

2. Поскольку $25_{10} = 11001_2$, то $x \,\&\, 25 \neq 0$ означает, что или нулевой, или третий, или четвертый разряд в двоичной записи числа *x* не равен 0.
3. Т.к. 17 = 16+1, то $x \,\&\, 17 = 0$ означает, что нулевой и четвертый разряд в двоичной записи числа *x* равны 0.
4. Из $(x\&25 \neq 0 \wedge x\&17 = 0)$ следует, что третий разряд в двоичной записи числа *x* не равен 0.
5. Поэтому если $8\&A \neq 0$, то выражение

$$(x\&25 \neq 0 \wedge x\&17 = 0) \rightarrow x\&A \neq 0$$

истинно при любом *x*,

Если же $8 \,\&\, A = 0$, то выражение ложно при, например, $x = 8$.

6. Наименьшее *A*, при котором $8\&A \neq 0$ равно 8.

Ответ: 8

А. Свойства 0, 1 и отрицания		
Свойства 0 и 1	$a \cdot 0 = 0$	$a + 0 = a$
	$a \cdot 1 = a$	$a + 1 = 1$
Свойства отрицания	$a \cdot \bar{a} = 0$	$a + \bar{a} = 1$
	$\bar{\bar{a}} = a$	

В. Дизъюнкция и конъюнкция		
Сочетательный закон (ассоциативность)	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	$a + (b + c) = (a + b) + c$
Переместительный закон (коммутативность)	$a \cdot b = b \cdot a$	$a + b = b + a$
Закон поглощения (идемпотентность)	$a \cdot a = a$	$a + a = a$
Распределительный закон (дистрибутивность)	$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$	$a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c)$
Правила де Моргана (дизъюнкция, конъюнкция и отрицание)	$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$	$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$

С. Импликация и эквивалентность		
Определение импликации	$a \to b = \bar{a} + b$	
Полезные свойства импликации	$\bar{a} \to \bar{b} = b \to a$	$a \to b \to c = (a \cdot b) \to c$
Эквивалентность	$(a = b) = a \cdot b + \bar{a} \cdot \bar{b}$	$(\overline{a = b}) = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b$

Логика - 3

- Сколько существует различных наборов значений логических переменных x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4, y5, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?
- (x1->x2) & (x2->x3) & (x3->x4) & (x4->x5) = 1
- (y1->y2) & (y2->y3) & (y3->y4) & (y4->x5) = 1
- x1∨y1 =1
- В ответе **<u>не нужно</u>** перечислять все различные наборы значений переменных x1, x2, x3, x4, x5, y1, y2, y3, y4, y5, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Логика-4: Игры и стратегии

За один ход игрок может добавить в кучу **один** камень или увеличить количество камней в куче **в два раза**. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16 или 30 камней.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 20.

Если при этом в куче оказалось не более 30 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход.

В противном случае победителем становится его противник.

Например, если в куче было 17 камней и Паша удвоит количество камней в куче, то игра закончится, и победителем будет Валя. В начальный момент в куче было S камней, $1 \le S \le 19$.

Логика-4: Игры и стратегии

За один ход игрок может добавить в кучу ***один*** *камень или увеличить количество камней в куче* ***в два раза****. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16 или 30 камней.*

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 20. Если при этом в куче оказалось не более 30 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник.

В начальный момент в куче было S камней, 1 ≤ S ≤ 19.

1. а) При каких значениях числа *S* Паша может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Паши.

   б) У кого из игроков есть выигрышная стратегия при *S* = 18, 17, 16? Опишите выигрышные стратегии для этих случаев.

2. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при *S* = 9, 8? Опишите соответствующие выигрышные стратегии.

3. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при *S* = 7? Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы).

Стратегия игрока – это правило, указывающее игроку ход, который он должен сделать. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника.

Стратегия игрока называется *выигрышной,* если игрок выигрывает в любой партии, разыгранной в соответствии с этой стратегией, как бы ни играл противник.

Множество всех партий, которые могут получиться при данной стратегии, представляется в виде дерева, это дерево называется *деревом всех партий для заданной стратегии.* В узлах дерева – позиции игры, на ребрах – ходы, которые переводят одну позицию в другую; корень дерева – начальная позиция игры. Дерево всех партий для данной стратегии можно описать с помощью рисунка или таблицы

И.п.	Положения после очередных ходов					
	1-й ход Паши (все ходы)	1-й ход Вали (только ход по стратегии)	2-й ход Паши (все ходы)	2-й ход Вали (только ход по стратегии)	3-й ход Паши (все ходы)	3-й ход Вали (только ход по стратегии)
7	7+1 = 8	8*2=16	16+1=17	17+1=18	18+1=19	19+1=20
					18*2=36	
			16*2=32			
	7*2=14	14*2=28				

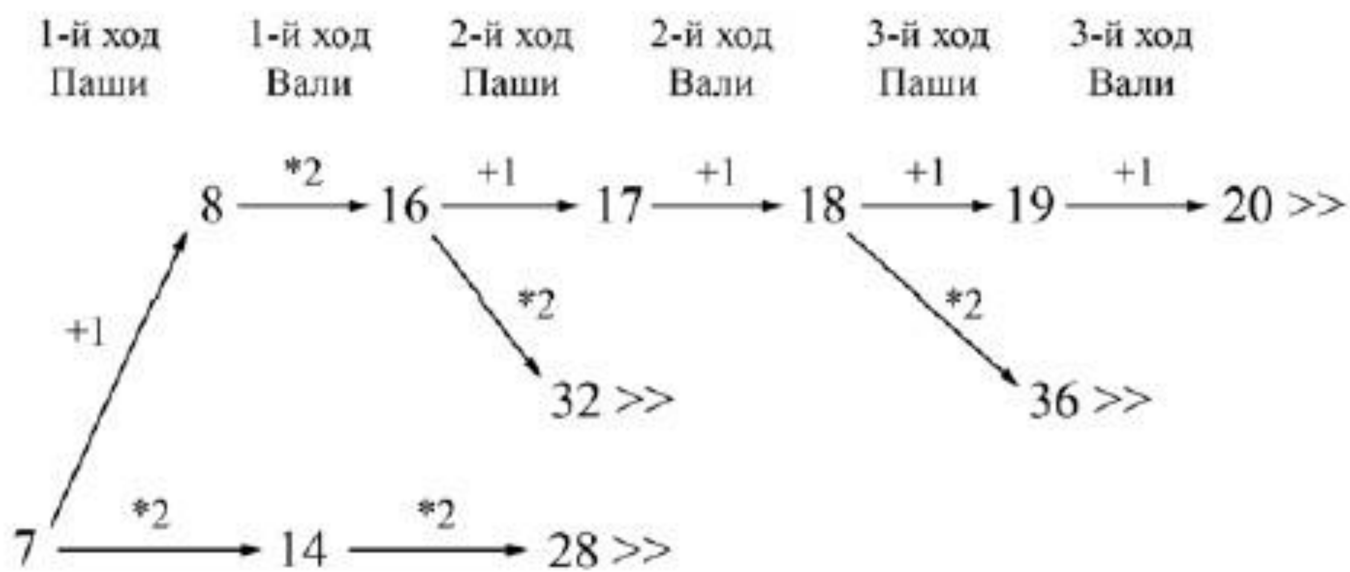


Рис. 1. Дерево всех партий, возможных при Валиной стратегии. Знаком >> обозначены позиции, в которых партия заканчивается

2.5. Что еще из математики?

- Делимость
- Наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное. Алгоритм Евклида.
- Квадратный трехчлен. Квадратное уравнение. Биквадратное уравнение

3. Алгоритмы и программирование

Можно выполнить трассировку, но лучше понять,

что делает программа

№8

Определите, что будет напечатано в результате работы следующего фрагмента программы:

Алгоритмический язык

```
нач
цел  k, s
s:=0
k:=0
нц пока s < 1024
      s:=s+10
      k:=k+1
кц
вывод k
кон
```

Языки программирования

- ***В примерах (часть В, С1)***

  Алгоритмический язык

  Паскаль

  Си

  Бейсик

  Python

В части С -

любой язык

Языки программирования

- ***В примерах (часть B, C1)***
  Алгоритмический язык
  Паскаль
  Си
  Бейсик (в 2017 г. – будет, дальше – видимо, нет)
  Python

В части С -
любой язык

Построение входа по выходу – трассировка не поможет.

№ 20 Получив на вход число *x*, алгоритм печатает два числа *L* и *M*.
Укажите наибольшее из таких чисел *x*, при вводе которых алгоритм печатает сначала 3, а потом 7.

```
алг
нач
  цел x, L, M
  ввод x
  L:=0; M:=0
  нц пока x>0
    L:=L+1
    если M < mod(x,10)
      то M:= mod(x,10)
    все
    x:=div(x,10)
  кц
  вывод L, нс, M
кон
```

Укажите такое число *x*, при вводе которого алгоритм печатает двузначное число, сумма цифр которого равна 16. Если таких чисел *x* несколько, укажите наименьшее из них.

Алгоритмический язык	**Паскаль**

<pre>алг
нач
  цел x, d, R
  ввод x
  R := 0
  нц пока x>0
    d := mod(x, 10)
    R := 10*R + d
    x := div(x, 10)
  кц
  вывод R
кон</pre>
	<pre>var
	 x,d,R: longint;
	begin
	  readln(x);
	  R := 0;
	  while x>0 do
	   begin
	    d := x mod 10;
	    R := 10*R + d;
	    x := x div 10
	   end;
	  writeln(R)
	end.</pre>

Построение входа по выходу – трассировка не поможет.

Но поэкспериментировать - полезно

№21 **Напишите в ответе наименьшее значение входной переменной *k*, при котором программа выдаёт тот же ответ, что и при входном значении *k* = 10.**

```
алг
нач
  цел i, k
  ввод k
  i := 1
  нц пока f(i) < g(k)
    i := i + 1
  кц
  вывод i
кон
```

```
алг цел f(цел n)
нач
  знач := n * n * n
кон

алг цел g(цел n)
нач
  знач := 2*n + 3
кон
```

№11. Сколько символов «*» будет напечатано на экране при выполнении вызова F(11)?

Алгоритмический язык	Паскаль

<pre>алг F(цел n)
нач
  если n > 0 то
    G(n - 1)
  все
кон
 	
алг G(цел n)
нач
  вывод "*"
  если n > 1 то
    F(n - 2)
  все
кон</pre>
	<pre>procedure F(n: integer); forward;
	procedure G(n: integer); forward;
	
	procedure F(n: integer);
	begin
	  if n > 0 then
	    G(n - 1);
	end;
	
	procedure G(n: integer);
	begin
	  writeln('*');
	  if n > 1 then
	    F(n - 2);
	end;</pre>

- **№22**

  У исполнителя Утроитель две команды, которым присвоены номера:
- **1. прибавь 1,**
- **2. умножь на 3.**

  Первая из них увеличивает число на экране на 1, вторая – утраивает его.

  Программа для Утроителя – это последовательность команд.

  Сколько есть программ, которые число 1 преобразуют в число 29?
- Ответ обоснуйте.

У исполнителя А16 есть три команды:

- **1. Прибавить 1**
- **2. Прибавить 2**
- **3. Умножить на 2**

Программа для исполнителя А16 – это последовательность команд.

Сколько существует таких программ, которые исходное **число 3** преобразуют в **число 12** и при этом траектория вычислений программы содержит **число 10**?

Траектория вычислений программы – это последовательность результатов выполнения всех команд программы. Например, для программы **132** при исходном числе 7 траектория будет состоять из чисел 8, 16, 18.

У исполнителя А16 есть три команды:

- **1. Прибавить 1**
- **2. Прибавить 2**
- **3. Умножить на 2**

Программа для исполнителя А16 – это последовательность команд.

Сколько существует таких программ, которые исходное **число 3** преобразуют в **число 12** и при этом траектория вычислений программы содержит **число 10**?

Траектория вычислений программы – это последовательность результатов выполнения всех команд программы. Например, для программы **132** при исходном числе 7 траектория будет состоять из чисел 8, 16, 18.

N(3->10->12) = N(3->10) * N(10->12)

У исполнителя А16 есть три команды:

- **1. Прибавить 1**
- **2. Прибавить 2**
- **3. Умножить на 2**

Программа для исполнителя А16 – это последовательность команд.

Сколько существует таких программ, которые исходное **число 3** преобразуют в **число 12** и при этом траектория вычислений программы **НЕ** содержит **чисел 10 и 11**?

Траектория вычислений программы – это последовательность результатов выполнения всех команд программы. Например, для программы **132** при исходном числе 7 траектория будет состоять из чисел 8, 16, 18.

N(3-> [10, 11] ->12) = N(3->6)

№27 *Вам предлагается два задания с похожими условиями: задание А и задание Б.*

Вы можете решать оба задания или одно из них по своему выбору. Задание Б более сложное, его решение оценивается выше. Итоговая оценка выставляется как ***максимальная*** *из оценок за задания А и Б.*

№27 *Вам предлагается два задания с похожими условиями: задание А и задание Б.*
Вы можете решать оба задания или одно из них по своему выбору. Задание Б более сложное, его решение оценивается выше. Итоговая оценка выставляется как ***максимальная*** *из оценок за задания А и Б.*

Напишите программу для решения этой задачи. Постарайтесь сделать программу эффективной по времени и используемой памяти (или хотя бы по одной из этих характеристик).

Программа считается эффективной по времени, если время работы программы пропорционально количеству пар чисел *N*, т.е. при увеличении *N* в *k* раз время работы программы должно увеличиваться не более чем в *k* раз.

Программа считается эффективной по памяти, если размер памяти, использованной в программе для хранения данных, не зависит от числа *N* и не превышает 1 килобайта.

Максимальная оценка за правильную программу, эффективную по времени и памяти, – 4 балла.

Максимальная оценка за правильную программу, эффективную по времени, но неэффективную по памяти, – 3 б.

№27 *Вам предлагается два задания с похожими условиями: задание А и задание Б.*

Вы можете решать оба задания или одно из них по своему выбору. Задание Б более сложное, его решение оценивается выше. Итоговая оценка выставляется как ***максимальная*** *из оценок за задания А и Б.*

- Задание А. Имеется набор данных, ***состоящий из 6 пар*** положительных целых чисел. Необходимо выбрать из каждой пары ровно одно число так, чтобы сумма всех выбранных чисел не делилась на 3 и при этом была максимально возможной. Если получить требуемую сумму невозможно, в качестве ответа нужно выдать 0.
- Задание Б. Имеется набор данных, состоящий из пар положительных целых чисел. Необходимо выбрать из каждой пары ровно одно число так, чтобы сумма всех выбранных чисел не делилась на 3 и при этом была максимально возможной. Если получить требуемую сумму невозможно, в качестве ответа нужно выдать 0.

ЧТО НЕ УСПЕЛИ ОБСУДИТЬ

- Задачи на управление исполнителями
- Технологии

ВЫВОДЫ

- Часто задача имеет «лобовое» решение, но имеет и красивое, менее трудоемкое
- Анти-натаскивание:

  - вариативность заданий относительно демо-версии;

  - лучшая подготовка – знать курс информатики

М.А. Ройтберг
mroytberg@lpm.org.ru,
ege-go.ru