М. А. Ройтберг, Схемы автоматов и реализуемые ими отображения, *Автомат. и телемех.*, 1978, выпуск 4, 151–160

УДК 62-507

СХЕМЫ АВТОМАТОВ И РЕАЛИЗУЕМЫЕ ИМИ ОТОБРАЖЕНИЯ

М. А. РОЙТБЕРГ

(Пущино-на-Оке)

Рассматриваются преобразования детерминированных словарных отображений (ДСО), которые можно задать схемой с обратными связями. Каждая схема описывается автоматом специального вида, так называемым схемным автоматом. Схемные автоматы называются схемно-эквивалентными, если они задают одно и то же преобразование ДСО. Выясняется, какие именно преобразования ДСО можно задать схемными автоматами. Даются алгоритм проверки схемной эквивалентности автоматов и алгоритм минимизации числа обратных связей в схеме, задающей данное преобразование ДСО.

1. Введение

В структурной теории автоматов рассматривается задача синтеза автомата как схемы, элементами которой являются автоматы. При этом, если даны две схемы, возникают задачи проверки эквивалентности отображений слов, задаваемых этими схемами, минимизация относительно каких-либо параметров и т. п.

Наша постановка отличается от приведенной выше. Пусть $\mathfrak{A}$ — инициальный автомат с входным алфавитом $\Sigma_0 \times \Sigma^n$ и выходным алфавитом $T_0 \times T^n$, для $\mathfrak{A}$ и любого инициального автомата X с входным алфавитом T и выходным алфавитом Σ можно построить схему, изображенную на рисунке.

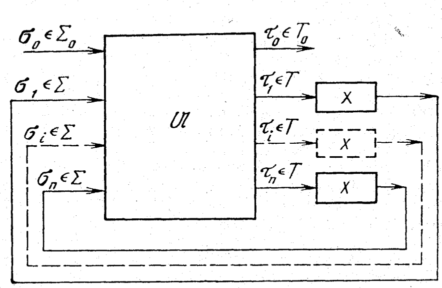

Схема на рисунке задает автомат с входным алфавитом Σ_0 и выходным алфавитом T_0. Этот автомат будем обозначать $S(\mathfrak{A}, X)$. Рассмотрим задачу построения автомата $\mathfrak{B}$ с входным алфавитом $\Sigma_0 \times \Sigma^m$ и выходным алфавитом $T_0 \times T_m$, такого, что для любого инициального автомата X $S(\mathfrak{A}, X)$ и $S(\mathfrak{B}, X)$ эквивалентны (в этом случае будем говорить, что $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ схемно-эквивалентны или s-эквивалентны, обозначение: $\mathfrak{A} \overset{s}{\sim} \mathfrak{B}$).

Такая задача возникает, например, в связи с тем, что часть схемы (в данном случае обратные связи X) разрабатывается другим коллективом и информации о ней нет. К автомату $\mathfrak{B}$ предъявляются требования минимальности веса, числа обратных связей и т. п. Требуется указать алгоритм проверки s-эквивалентности двух данных автоматов. Перечисленные задачи приводят к рассмотрению отображения $f_{\mathfrak{A}}: X \to S(\mathfrak{A}, X)$ (автомат $\mathfrak{A}$ фиксирован). Областью определения $f_{\mathfrak{A}}$ является множество детерминированных словарных отображений (ДСО) из T^* в Σ^* (множество ДСО из T^* в Σ^* будем обозначать $k(T, \Sigma)$). Область значений $f_{\mathfrak{A}}$ — подмножество $k(\Sigma_0,$

T_0). Отображения $k(T, \Sigma)$ в $k(\Sigma_0, T_0)$ будем называть метаоператорами (МО); T, Σ, T_0, Σ_0 — любые алфавиты.

Представляется интересным вопрос: для каких метаоператоров $F:k(T, \Sigma)\to k(\Sigma_0, T_0)$ может быть указан конечный автомат $\mathfrak{A}$, такой, что $F(X)$ и $S(\mathfrak{A}, X)$ для любого $X\in k(T, \Sigma)$ эквивалентны. Если такой автомат $\mathfrak{A}$ существует, то будем говорить, что $\mathfrak{A}$ реализует F. Этот вопрос аналогичен вопросу о том, какие словарные отображения могут быть реализованы конечным автоматом.

В настоящей работе рассматривается класс так называемых обобщенных автоматов Мура (ОМ-автоматов), таких, что если $\mathfrak{A}$ — ОМ-автомат, $\mathfrak{A}\in k(\Sigma_0\times\Sigma^n, T_0\times T^n)$ и $X\in k(T, \Sigma)$ — произвольный, то схема на рисунке определена корректно.

Дается критерий того, что для метаоператора F может быть указан конечный ОМ-автомат, реализующий F (теорема 1). Приводится алгоритм минимизации числа обратных связей в ОМ-автомате, реализующем F (теорема 2). Дается алгоритм проверки s-эквивалентности двух ОМ-автоматов (теорема 3).

Задачи взаимодействия двух автоматов в схеме, подобной схеме рисунка, рассматривались А. А. Летичевским в работах [1, 2] и др. авторами. Однако в работах А. А. Летичевского в отличие от данной статьи $\mathfrak{A}$ (в терминологии [1] — управляющий автомат) — это автомат с заключительным состоянием и без внешних входа и выхода; изучаемый объект — преобразование, задаваемое автоматом $\mathfrak{A}$ на множестве внутренних состояний X (в терминологии А. А. Летичевского — операционного автомата).

2. Предварительные замечания и определения

Будем пользоваться следующими обозначениями:

1. $|X|$ — количество элементов конечного множества X; $l(p)$ — длина слова p, $(p)_f$ — последняя буква p; если p_1 и p_2 — слова, то $p_1<p_2$ означает, что p — начало p_2.

2. Пусть Σ_0, Σ — алфавиты; $p\in(\Sigma_0\times\Sigma^n)^*$. Тогда p^i означает i-ю координату p ($i=0, 1, \ldots, n$). Если p_1, $p_2\in(\Sigma_0\times\Sigma^n)^*$; σ_1, $\sigma_2\in\Sigma_0$, то $p_s\sigma_1<p_2$ означает $\exists\theta\in\Sigma_0\times\Sigma^n$ $(\theta^0=\sigma_1\&p_2\theta<p_2)$; $p_1\sigma_1<p_2\sigma_2$ означает, что $p_1\sigma_1<p_2$ или $p_1=$ $=p_2\&\sigma_1=\sigma_2$.

3. $\mathfrak{A}\langle\Sigma, Q, T, q_0, \varphi, \psi\rangle$ будет обозначать, что $\mathfrak{A}$ — автомат (не обязательно конечный) с входным алфавитом Σ, множеством внутренних состояний Q, выходным алфавитом T, начальным состоянием q_0, функцией переходов $\varphi:Q\times\Sigma\to Q$, функцией выходов $\psi:Q\times\Sigma\to T$. Функции φ и ψ естественно продолжаются до функций $\varphi:Q\times\Sigma^*\to Q$ и $\psi:Q\times\Sigma^*\to T^*$. Детерминированный словарный оператор (ДСО), задаваемый $\mathfrak{A}$, будем обозначать той же буквой.

4. Пусть $\mathfrak{A}=\langle\Sigma_0\times\Sigma^n, Q, T_0\times T^n, q_0, \varphi, \psi\rangle$. Будем представлять $\mathfrak{A}$ как автомат с $n+1$ выходным и $n+1$ выходным каналами. Входы и выходы будем считать перенумерованными от 0 до n. Будем считать, что по нулевому входному (выходному) каналу подаются символы из Σ_0 (соответственно T_0).

5. *Определение.* Автомат $\mathfrak{A}=\langle\Sigma_0\times\Sigma^n, Q, T_0\times T^n, q_0, \varphi, \psi\rangle$ называется обобщенным автоматом Мура (ОМ-автомат), если выход по любому каналу, кроме нулевого, полностью определяется состоянием $\mathfrak{A}$ и входом по нулевому каналу, т. е.

$$\forall q\in Q,\ \forall\sigma_0\in\Sigma_0,\ \forall\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \sigma_1', \ldots, \sigma_n'\in\Sigma,\ \forall j\in\{1, \ldots, n\},$$
$$(1)\qquad \psi^j(q_0, \langle\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n\rangle)=\psi^j(q, \langle\sigma_0, \sigma_1', \ldots, \sigma_n'\rangle).$$

Здесь и далее, если для некоторого множества M, $f:M\to(T_0\times T^n)^*$, то $f^j(x)$ обозначает $(f(x))^j$ $(j=0, 1, \ldots, n)$. Очевидно, если $\mathfrak{A}$ — автомат Мура, то $\mathfrak{A}$ — обобщенный автомат Мура.

Если $\mathfrak{A}$ — ОМ-автомат, то для любого автомата $X \in k(\mathrm{T}, \Sigma)$ можно построить схему с n обратными связями, аналогичную изображенной на рисунке (в дальнейшем будем писать просто «схема 1»).

При подаче на вход схемы $\sigma_0 \in \Sigma_0$ в силу (1) определен выход по всем каналам, кроме нулевого, следовательно, определен вход по всем каналам, теперь определен выход по нулевому каналу и новое состояние $\mathfrak{A}$ и т. д. Более подробно о работе схемы 1 см. [3].

Если для метаоператора (МО) $F: k(\mathrm{T}, \Sigma) \to k(\Sigma_0, \mathrm{T}_0)$ существует (не обязательно конечный) ОМ-автомат $\mathfrak{A}$, такой, что для всех $X \in k(\mathrm{T}, \Sigma)$

$$F(X) \sim S(\mathfrak{A}, X),$$

то будем называть F схемным с базисным автоматом $\mathfrak{A}$ и говорить, что ОМ-автомат $\mathfrak{A}$ реализует F.

Среди всех схемных МО нас особо будут интересовать МО, реализуемые конечным ОМ-автоматом.

6. Пусть t — дерево с отмеченным корнем. Ярусом t будем называть множество вершин t, находящихся на одинаковом расстоянии от корня. Если расстояние от корня до вершины данного яруса равно i, то ярус будем называть i—M. Ребра будем считать ориентированными от вершин меньшего яруса к вершинам большего яруса. Ребро, ведущее в вершину i-го яруса, будем называть ребром i-го яруса. Высотой дерева t будем называть такое число l, при котором в t есть вершина l-го яруса и нет вершин $(l+1)$-го яруса. Высота t обозначается $l(t)$. Дерево t будем называть полным, если из каждой вершины, кроме вершин максимального яруса, выходит хотя бы одно ребро. Деревья будем представлять расположенными в плоскости листа так, что большие ярусы расположены выше, т. е. ребра направлены снизу вверх. Имея это в виду, будем говорить, что из двух вершин данного яруса одна расположена левее другой, будем говорить о верхнем ярусе и т. п.

7. $k(\Sigma, \mathrm{T})$ — множество всех детерминированных словарных операторов (ДСО) из Σ^* в T^* (определение ДСО см. в [4]).

8. Полным k-арным деревом будем называть бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит k ребер. Пусть Σ, T — конечные алфавиты, причем T упорядочен.

Т-дерево — полное $|\mathrm{T}|$-арное дерево, каждое ребро которого помечено буквой из T, причем $|\mathrm{T}|$ ребер, выходящих из данной вершины, помечены так, что более левому ребру соответствует меньшая буква из T. Началом высоты h корневого дерева t будем называть подграф, порожденный множеством вершин, находящихся от корня на расстоянии не больше h.

Т-дерево высоты h — начало высоты h Т-дерева. Каждую вершину Т-дерева можно задать словом $x \in \mathrm{T}^*$. Иногда вместо «вершина Т-дерева, задаваемая x» будем писать: «вершина x».

Σ—Т-дерево — Т-дерево, каждое ребро которого, кроме буквы из T, помечено буквой из Σ.

Σ—Т-дерево высоты h — начало высоты h Σ—Т-дерева. Каждому ДСО $F: \mathrm{T}^* \to \Sigma^*$ можно поставить в соответствие Σ—Т-дерево: ребро, ведущее в вершину x, где $x \in \mathrm{T}^*$, помечается последней буквой слова $F(x)$. Такое дерево мы будем называть деревом ДСО F и обозначать $t(F)$.

9. Наряду с деревьями будем рассматривать и так называемые c-деревья. Фиксируем конечные упорядоченные алфавиты Σ, T, Σ_0, T_0. c-деревом называется несвязный, ориентированный граф с двумя компонентами связности, помеченный буквами из $\Sigma \times \mathrm{T} \cup \Sigma_0 \times \mathrm{T}_0$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) одна из компонент (основа c-дерева) — полное корневое дерево, другая (линия c-дерева) — полное корневое дерево, из каждой вершины которого выходит не более одного ребра, т. е. простая цепь; высоты линии и основы c-дерева равны;

2) все ребра линии помечены буквами из $\Sigma_0 \times T_0$, ребра основы помечены буквами из $\Sigma \times T$ или совсем не помечены (эти пометки будем называть соответственно Σ_0, T_0, Σ, T-пометками; вершина, в которую ведет непомеченное ребро, будет называться Λ-вершиной);

3) если из вершины основы выходит более одного ребра, то все они помечены и более левое из них имеет меньшую T-пометку;

4) все вершины, входящие в поддерево с корнем в Λ-вершине, — Λ-вершины.

c-дерево высоты 0, т. е. граф. . . , будем обозначать через Λ.

3. Метаоператоры и c-деревья

Нашей ближайшей задачей будет указать критерий того, что данный МО $F{:}k(T, \Sigma) \to k(\Sigma_0, T_0)$ является схемным. Это будет сделано аналогично тому, как в [5—7] класс конечноавтоматных словарных операторов выделяется из класса всех операторов при помощи понятий оператора без предвосхищения (иначе, детерминированного оператора) и веса оператора. Будет выделен класс детерминированных МО (ДМО) и указан способ описанных ДМО с помощью семейств c-деревьев. Результаты этого раздела носят технический характер.

Определение. МО $A{:}k(T, \Sigma) \to k(\Sigma_0, T_0)$ называется детерминированным (ДМО), если для любого натурального m, для любых двух ДСО X_1, $X_2 \in k(T, \Sigma)$, неотличимых на словах из T^* длины не более m, $A(X_1)$ и $A(X_2)$ неотличимы на словах из $\Sigma_0{}^*$ длины не более m.

Понятие ДМО является аналогом словарного оператора без предвосхищения.

Лемма 1. Если МО A — схемный, то A — детерминированный. Доказательство очевидно.

Далее все метаоператоры будем считать детерминированными.

Пусть $A{:}k(T, \Sigma) \to k(\Sigma_0, T_0)$. Для задания A достаточно для каждого $p = \langle v, w \rangle \in (\Sigma_0 \times T_0)^*$ задать множество ДСО

$$M_p(A) = \{X \in k(T, \Sigma) \mid A(x)(v) = w\}.$$

Пусть $p \in (\Sigma_0 \times T_0)^*$; $l(p) = m$. Тогда, как A — ДМО, любые два ДСО из $k(T, \Sigma)$, неотличимые на словах длины не больше m, либо оба принадлежат $M_p(A)$, либо оба не принадлежат $M_p(A)$, т. е. $M_p(A)$ является объединением конечного числа классов ДСО, причем в каждый класс попадают все ДСО, деревья которых имеют данное начало высоты m. Следовательно, $M_p(A)$ задается конечным набором помещенных деревьев высоты m: эти деревья — начала высоты m деревьев ДСО из $M_p(A)$. Нам будет удобно рассматривать вместо набора помеченных деревьев высоты m набор c-деревьев. Между этими наборами есть взаимно-однозначное соответствие, при котором дереву t соответствует c-дерево; основой которого является t, а вдоль линии написано слово p (напомним, что линия — направленная помеченная простая цепь; если $p = p_1 \ldots p_{l(t)}$, то p_i — пометки на i-м ярусе линии).

Множество c-деревьев, задаваемое $M_p(A)$, будем обозначать $\hat{S}_p(A)$. Через $\hat{S}(A)$ будем обозначать $\bigcup\limits_{p \in (\Sigma_0 \times T_0)^*} \hat{S}_p(A)$. Заметим, что если A_1, A_2 — ДМО и $\hat{S}(A_1) = \hat{S}(A_2)$, то $A_1 = A_2$. Семейство c-деревьев $\hat{S}(A)$ для ДМО A является аналогом языка в декартовом произведении входного и выходного алфавитов, являющегося графиком ДСО. Однако ДМО A можно задать семейством c-деревьев и более экономным образом.

Введем понятие t-несущественной вершины ($t \in \hat{S}(A)$) и опишем, как, удалив из каждого c-дерева $t \in \hat{S}(A)$ t-несущественные вершины, получить новое семейство c-деревьев $S(A)$, которое и будет играть основную роль в наших рассмотрениях.

Пусть $t \in \hat{S}(A)$, $\sigma_0 \in \Sigma_0$, $\tau \in \mathrm{T}$, $p = \langle u, v\rangle \in (\Sigma_0 \times \mathrm{T}_0)^*$ — слово, которым помечена линия t. Через $M_t(A)$ будем обозначать множество таких ДСО $X \in k(\mathrm{T}, \Sigma)$, что начало $t(X)$ высоты $l(t)$ совпадает с основой t. Пусть $x \in \mathrm{T}^*$, $l(x) = l(t)$.

Определение. Буква $\tau \in \mathrm{T}$ называется t, σ_0, x-несущественной для A, если для любых $X_1, X_2 \in M_t(A)$ выполнено

$$\forall y \in x\tau\mathrm{T}^* (X_1(y) = X_2(y)) \rightarrow \forall w \in u\sigma_0\Sigma_0^* (A(X_1)(w) = A(X_2)(w)).$$

Если понятно, о каком МО идет речь, будем говорить просто t, σ_0, x-несущественная.

Очевидно, если $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_s$ соответственно t, σ_0, $x_1, \ldots, t$, σ_0, x_s-несущественные и начала высоты $l(t)+1$ X_1 и X_2 отличаются лишь Σ-пометками на ребрах, ведущих в $x_1\tau_1, \ldots, x_s\tau_s$, то

$$\forall \tau_0 \in \mathrm{T}_0 \quad X_1 \in M_{\langle u\sigma_0,\, v\tau_0\rangle}(A) \leftrightarrow X_2 \in M_{\langle u\sigma_0,\, v\tau_0\rangle}(A).$$

Пусть $t \in \hat{S}(A)$, $l(x) = n < l(t)$, $\tau \in \mathrm{T}$; σ_0—Σ_0-пометка на $(n+1)$-м ярусе линии t, t' — начало t высоты n.

Вершина $x\tau$ называется t-несущественной, если τ—t', σ_0, x-несущественная буква. В противном случае вершина называется t-существенной. Если ясно, о каком t идет речь, вместо «t-несущественная вершина» будем писать «несущественная вершина». Ребро, ведущее в несущественную вершину, будем называть несущественным. Удалим из каждого $t \in \hat{S}(A)$ несущественные вершины и ребра. Результат применения такой процедуры к $t \in \hat{S}(A)$ будем обозначать $P(t)$.

Лемма 2 показывает, что в результате этого из основы t получается дерево, т. е. все вершины основы t, входящие в поддерево с корнем в несущественной вершине,— несущественные.

Лемма 2. Пусть $t \in \hat{S}_{\langle u, v\rangle}(A)$, $\sigma_0 \in \Sigma_0$, $x \in \mathrm{T}^*$, $l(x) = l(t)$, $\tau_0 \in \mathrm{T}_0$, $\tau \in \mathrm{T}$. Тогда если $t_1 \in \hat{S}_{\langle u\sigma_0,\, v\tau_0\rangle}(A)$ — продолжение t и τ_1—t, τ_0, x-несущественна, то $\forall \theta \in \Sigma_0 \forall \tau_2 \in \mathrm{T}$ τ_2—t_1, θ, $x\tau_1$-несущественна.

Доказательство. Пусть $X_1, X_2 \in M_{t_1}(A)$ и $\forall v \notin \tau_1\tau_2\mathrm{T}^*(X_1(v) = X_2(v))$. Тогда, так как t — начало t_1, то $X_1, X_2 \in M_t(A)$. Так как τ_1—t, σ_0, x-несущественна, то

$$\forall u \in u\sigma_0\Sigma_0^*(A(X_1)(u) = A(X_2)(u)).$$

Значит, $\forall u \in u_0\sigma_0\theta\Sigma_0^* A(X_1)(u) = A(X_2)(u)$, что и требовалось доказать.

Предложение 1. Если для двух ДМО A_1 и A_2 $\{P(t) \mid t \in \hat{S}(A_1)\} = \{P(t) \mid t \in S(A_2)\}$, то $\hat{S}(A_1) = S(A_2)$ и, следовательно, $A_1 = A_2$.

Доказательство см. в приложении.

Нам будет удобно вместо $P(t)$ рассматривать c-дерево $P'(t)$, которое получается из $P(t)$ с помощью следующей процедуры.

Пусть $t \in \hat{S}(A)$, $l(t) = m$, $x \in \mathrm{T}^*$, $l(x) = l < m$, x — существенная вершина в t, из вершины x в $P(t)$ не выходит ни одного ребра. Тогда из вершины x проводим простую цепь длины $m-l$, ребра которой никак не помечены. Семейством c-деревьев $S(A) = \{P'(t) \mid t \in \hat{S}(A)\}$ и будем в дальнейшем задавать ДМО. Пусть $S = S(A)$. Тогда для S выполнен ряд свойств, полезных для дальнейших доказательств. Они перечислены в приложении. Если F — схемный ДСО и A_F — МО, который он реализует, то иногда вместо $S(A_F)$ будем писать $S(F)$.

4. Основные результаты

Для доказательства теорем 1—3 нам понадобятся новые понятия и прежде всего понятие размерности семейства c-деревьев.

Размерность семейства c-деревьев характеризует степень «разветвленности» этого семейства. Например, если основы всех c-деревьев семейства — простые цепи, то размерность этого семейства равна 1. Для любого схемного ДСО F размерность семейства $S(F)$ совпадает с минимальным возможным числом обратных связей в ДСО, схемно-эквивалентном F.

Введем дополнительные обозначения.

1. Пусть t—c-дерево. Через $\lambda(t)$ будем обозначать количество вершин верхнего яруса основы t.

2. Пусть S — семейство c-деревьев, $t\in S$; $\{V_1, \ldots, V_{\lambda(t)}\}$ — множество вершин верхнего яруса основы t. S_{t, v_i} — семейство таких c-деревьев t', для которых существует c-дерево $t_2\in S$, удовлетворяющее следующим условиям:

2.1) начало t_2 высоты $l(t)$ совпадает с t с точностью до T_0-пометки на верхнем ярусе линии и Σ-пометок на верхнем ярусе основы;

2.2) $l(t_2)=l(t)+l(t')$;

2.3) линия t' совпадает с концом линии t_2 длины $l(t')=l(t_2)-l(t)$;

2.4) основа t' — поддерево t_2 с корнем V_i.

Пусть S — семейство c-деревьев. Введем понятие размерности S. Размерность $d(S)$ семейства S может быть натуральным числом или символом ∞.

Определение:

1. $d(S)=\sup\limits_{t\in S}\lambda(t)$.

2. Пусть определено $d_m(S)$. Если $d_m(S)=\infty$, то $\forall n>m$ $d_n(S)=\infty$, $d(S)=\infty$. Если $d_m(S)<\infty$, то

$$d_{m+1}(S)=\sup_{t\in S}\sum_{i=1}^{\lambda(t)} d_m(S_{t,v_i}).$$

3. Если $\forall m d_m(S)<\infty$, то $d(S)=\lim\limits_{m\to\infty} d_m(S)$. Так как $d_m(S)=d_m(S_{\Lambda, V(\Lambda)})$, то $d_{m+1}(S)\geqslant d_m(S)$, т. е. $d(S)$ всегда определено.

Лемма 3. $d(S)<\infty$ тогда и только тогда, когда $d_1(S)<\infty$. Доказательство см. в приложении.

Лемма 4. Пусть A — схемный МО и $F:(\Sigma_0\times\Sigma^n)^*\to(T_0\times T^n)^*$ — ДСО, который его реализует. Тогда $d(S(A))\leqslant n$.

Доказательство очевидно.

Каждому семейству c-деревьев конечной размерности поставим в соответствие язык в достаточно большом конечном алфавите.

Пусть S — семейство c-деревьев, $t\in S$. Пусть $1\leqslant i\leqslant l(t)$, V_0 — вершина $(i+1)$-го яруса линии t; $V_1, \ldots, V_k$ — вершины $(i-1)$-го яруса основы t, причем если $\alpha<\beta$, то V_α левее V_β.

i-м слоем дерева t будем называть упорядоченный набор $\langle G_0, G_1, \ldots, G_k\rangle$ подграфов c-дерева t, где G_α порожден V_α и всеми вершинами i-го яруса, в которые из V_α ведет ребро.

Если $d(S)<\infty$, то в деревьях из S возможно лишь конечное количество слоев. Для каждого n фиксируем алфавит A_n и кодирование всех слоев, возможных в c-дереве t с $\lambda(t)\leqslant n$, буквами из A_n. Тогда каждое c-дерево t с $\lambda(t)\leqslant n$ кодируется некоторым словом $p\in A_n^*$ длины $l(t)$ (если $p=p_1\ldots p_{l(t)}$, то p_i — код i-го слоя t). Код дерева t в A_n будем обозначать $kd^n(t)$. Если S — семейство c-деревьев; $d(S)<n$, то $kd^n(t)$ определено для каждого $t\in S$. Код семейства S в A_n — это язык $kd^n(S)=\{kd^n(t)\mid t\in S\}$. Очевидно, если $kd^n(S_1)=kd^n(S_2)$, то $S_1=S_2$. Весом $P(S)$ семейства S будем называть вес языка $kd^n(S)$. Очевидно, $P(S)$ не зависит от выбора A_n и $P(S)$ конечен тогда и только тогда, когда $kd^n(S)$ — регулярный язык.

Лемма 5. Если A — схемный МО с базисным автоматом F и вес F конечен, то вес S конечен.

Доказательство очевидно.

Лемма 6. Пусть A — детерминированный МО; $d(S(A))=n$. Тогда существует МО-автомат F, реализующий A, причем

(i) $F \in k(\Sigma_0 \times \Sigma^n, T_0 \times T^n)$;

(ii) если вес $S(A)$ конечен, то и вес F конечен.

Доказательство см. в приложении.

Теорема 1. 1. МО A схемный тогда и только тогда, когда A детерминированный и $d_1(S(A)) < \infty$.

2. Схемный МО A реализуется конечным ОМ-автоматом тогда и только тогда, когда вес $S(A)$ конечен.

Доказательство очевидно из лемм 3—6.

Теорема 2. Пусть $F \in k(\Sigma_0 \times \Sigma^n, \mathrm{T}_0 \times \mathrm{T}^n)$ — ОМ-автомат; $d(S(F)) = m \leqslant n$. Тогда существует ОМ-автомат $G \in k(\Sigma_0 \times \Sigma^m, \mathrm{T}_0 \times \mathrm{T}^m)$, схемно-эквивалентный F, и для любого ОМ-автомата $H \in k(\Sigma \times \Sigma^l, \mathrm{T}_0 \times \mathrm{T}^l)$, где $l < m$, $H \underset{s}{\not\sim} F$.

Доказательство очевидно из теоремы 1 и леммы 4.

Пусть $F \in k(\Sigma_0 \times \Sigma^n, \mathrm{T}_0 \times \mathrm{T}^n)$; $G \in k(\Sigma_0 \times \Sigma^m, \mathrm{T}_0 \times \mathrm{T}^m)$; F и G — конечноавтоматные; $n \leqslant m$. Тогда по лемме 5, $kd^m(S(F))$ и $kd^m(S(G))$ — регулярные языки. Из определения $S(F)$ и $kd^m(S(F))$ следует, что F схемно-эквивалентно G тогда и только тогда, когда

$$kd^m(S(F)) = kd^m(S(G)).$$

Существует алгоритм $\mathfrak{D}$, по всякому конечному автомату $F \in k(\Sigma_0 \times \Sigma^n, \mathrm{T}_0 \times \mathrm{T}^n)$ и $m \geqslant n$, строящий $kd^m(S(F))$.

Описание этого алгоритма громоздко и в настоящей работе приведено не будет. Из существования алгоритма $\mathfrak{D}$ и алгоритма проверки равенства регулярных языков следует теорема 3.

Теорема 3. Существует алгоритм, по двум конечным ОМ-автоматам F и G определяющий, являются ли они схемно-эквивалентными.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство предложения 1.

Лемма 7. Пусть $t_1, t_2 \in \widehat{S}_{\langle u,v\rangle}(A)$, $P(t_1) = P(t_2)$, $x \in \mathrm{T}^*$, $l(x) = l(t_1) = l(t_2)$, $\sigma_0 \in \Sigma_0$, $\tau - t_1$, σ_0, x-несущественная для A. Тогда $\tau - t_2$, σ_0, x-несущественная для A.

Доказательство. Если x — несущественная вершина для t_1, то, так как $P(t_1) = P(t_2)$, x — несущественная вершина для t_2. Тогда все очевидно в силу леммы 2.

Пусть x — несущественная вершина для t_1 и t_2. Далее доказательство ведется индукцией по количеству поддеревьев, выбрасываемых из t_1 (или, что то же самое, из t_2) при построении $P(t_1)$ (соответственно t_2), на которых t_1 и t_2 отличаются.

а. Если $t_1 = t_2$, то все очевидно.

б. Пусть лемма доказана для случая k поддеревьев и t_1 отличается от t_2 на $k+1$ выбрасываемых поддеревьев. Пусть $Y \in \mathrm{T}^*$ — корень одного из таких поддеревьев. Пусть $X_1, X_2 \in M_{t_2}(A)$ и $\forall w \in (T^* \setminus x\tau T^*)(X_1(w) = X_2(w))$. Фиксируем $Y \in M_{t_1}(A)$ и рассмотрим $Z_1, Z_2 \in k(\mathrm{T}, \Sigma)$, такие, что

$$Z_1(w) = \begin{cases} X_1(\mathrm{w}), & \text{если} \quad w \notin y\mathrm{T}^*, \\ Y(w), & \text{если} \quad w \in y\mathrm{T}^*, \end{cases}$$

$$Z_2(w) = \begin{cases} X_2(w), & \text{если} \quad w \notin y\mathrm{T}^*, \\ Y(w), & \text{если} \quad O \in y\mathrm{T}^*. \end{cases}$$

Очевидно, Z_1 и Z_2 совпадают всюду, кроме, быть может, $x\tau\mathrm{T}^*$.

Рассмотрим t_3 — c-дерево из $\widehat{S}_{\langle u,v\rangle}(A)$, соответствующее Z_1 и Z_2.

t_3 отличается от t_1 не более чем на k выбрасываемых поддеревьях. По предположению индукции $\tau - t_3$, σ_0, x-несущественная буква, т. е.

(2) $$\forall w \in u\sigma_0\Sigma_0^* A(Z_1)(w) = A(Z_2(w)).$$

Но y — несущественная вершина для t_1 и t_2. Поэтому

(3) $$\forall w \in u\sigma_0\Sigma_0^*(A(X_1)(w) = A(Z_1)(w) \,\&\, A(X_2)(w) = A(Z_2)(w)).$$

Из (2) и (3) следует, что

$$\forall w \in u\sigma_0 \sum\nolimits_0^* A(X_1)(w) = A(X_2)(w),$$

т. е. $\tau - t_2$, σ_0, x-несущественная буква. Аналогично индукцией по количеству поддеревьев, на которых отличаются t_1 и t_2, доказывается следующая лемма.

Лемма 8. Пусть $t_1, t_2 \in \hat{S}(A)$; $P(t_1) = P(t_2)$ с точностью до T_0-пометки на верхнем ярусе линии. Тогда $P(t_1) = P(t_2)$, т. е. T_0-пометки на верхнем ярусе линии тоже совпадают.

Лемма 9. Пусть $t_1 \in \hat{S}(A)$; t_2 — c-дерево, линия которого совпадает с линией t_1; основа t_2 — Σ–Т-дерево высоты $l(t_1)$. Пусть после удаления их t_2 ребер, ведущих в вершины, соответствующие несущественным вершинам t_1, получим $P(t_1)$. Тогда $t_2 \in \hat{S}(A)$ и $P(t_2) = P(t_1)$.

Доказательство. Пусть $l(t_1) = m$ и $m - l$ — высота максимального общего начала t_1 и t_2. Доказывать будем индукцией по l. Если $l = 0$, т. е. $t_1 = t_2$, то все очевидно.

Пусть утверждение леммы доказано для случая, когда наибольшее общее начало t_1 и t_2 имеет высоту не менее $l(t_1) - k$. Докажем лемму для случая, когда наибольшее общее начало t_1 и t_2 имеет высоту $l(t_1) - (k+1)$. Рассмотрим t_1' и t_2' — начала соответственно t_1 и t_2 высоты $l(t_1) - 1 = l(t_2) - 1$. По индукционному предположению $t_2' \in \hat{S}(A)$ и $P(t_1') = P(t_2')$. Пусть w — Σ_0-пометка на линиях t_1 и t_2. Рассмотрим c-дерево $t_3 \in \hat{S}(A)$, задаваемое u и основой t_2. Оно отличается от t_2 лишь, быть может, T_0-пометкой на верхнем ярусе. По лемме 7 основы $P(t_3)$ и $P(t_1)$ отличаются лишь, быть может, Σ-пометками на верхнем ярусе.

По условию нашей леммы, основы $P(t_3)$ и $P(t_1)$ совпадают. По лемме 8 $P(t_3) = P(t_1)$, т. е. линия t_3 совпадает с линией t_2 и t_1. Значит, $t_2 = t_3$, т. е. $t_2 \in \hat{S}(A)$ и $P(t_2) = P(t_1)$.

Из леммы 9, очевидно, следует предложение 1.

Нам понадобятся такие свойства семейства $S = S(A)$ (они следуют из лемм 2, 7, 8, 9 и будут использованы при доказательстве леммы 6).

С1. Пусть $t_1, t_2 \in S$; $l(t_1) = l(t_2)$, начала t_1 и t_2 высоты $l(t_1) - 1 = l(t_2) - 1$ совпадают Σ_0-пометки на верхнем ярусе линий t_1 и t_2 совпадают. Тогда основы t_1 и t_2 совпадают с точностью до Σ-пометок на верхнем ярусе.

С2. Пусть $t_1, t_2 \in S$; t_1 совпадает с t_2, кроме, быть может, T_0-пометки на верхнем ярусе. Тогда $t_1 = t_2$.

Определение. Пусть $t \in S$, V не Λ-вершина верхнего яруса t, пусть в V из корня помечен словом $y \in \mathrm{T}^*$ (будем писать: «в V ведет y»).

$t_1, t_2 \in S$ называются t, V-согласованными, если:

а) $l(t_1) = l(t_2) \geqslant l(t)$;

б) начала t_1 и t_2 высоты $l(t)$ отличаются от t лишь, быть может, Σ-пометкой на ребре, ведущем в V, и T_0-пометкой на верхнем ярусе линии;

в) для любого $x \neq y\mathrm{T}^*$, если V_1 и V_2 — вершины соответственно t_1 и t_2, в которые ведет x, то Σ-пометки на ребрах, ведущих в V_1 и V_2, совпадают;

г) Σ_0 — пометки на линиях t_1 и t_2 совпадают.

С3. Пусть $t \in S$; V — вершина верхнего яруса t. Если V не Λ-вершина, то существуют $t_1 t_2 \in S$, такие, что t_1 и t_2 t, V-согласованы и T_0-пометки на линиях t_1 и t_2 различны.

Доказательство. Пусть $u \in \Sigma_0^*$ — Σ_0-пометка на линии t. Пусть в V ведет $y \in \mathrm{T}^*$. Так как V не Λ — вершина, то найдутся $u_1 > u$ и $X_1, X_2 \in M_t(A)$, такие, что

$$\forall w \neq y\mathrm{T}^* (X_1(w) = X_2(w))\,\&\,A(X_1)(u_1) \neq A(X_2)(u_1).$$

Очевидно, c-деревья, соответствующие u_1, X_1 и u_1, X_2, будут t, V-согласованы и T_0-пометки у них будут различны.

С4. Если $t \in S$ и t_1 — начало t, то $t_1 \in S$.

С5. Если $t \in S$, $\sigma_0 \in \Sigma_0$, то существует $t_1 \in S$, такое, что t — начало t_1 высоты $l(t_1) - 1$ и σ_0 — Σ_0-пометка на верхнем уровне t_1.

С6. Пусть $t \in S$, $V_1, \ldots, V_n$ — все не Λ-вершины верхнего яруса t (слева направо); $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$. Тогда существует $t_1 \in S$, которое отличается от t лишь, быть может, T_0-пометкой и Σ-пометками на верхнем уровне, причем Σ-пометка на ребре t_1, ведущем в V_i, равна σ_i.

Доказательство. Пусть $t' \in \hat{S}(A)$, такое, что $t = P'(t')$; $X \in M_{t'}(A) \subset k(\mathrm{T}, \Sigma)$. Пусть $u_0 \in \Sigma_0^*$ — пометка на линии t и x_i — слово, которое ведет в V_i ($i = 1, \ldots, n$). Рассмотрим автомат X_1, который работает на всех словах из T^* длины не более $l(t)$, кроме $x_1, \ldots, x_n$, так же как и X, и последняя буква $X_1(x_i)$ есть σ_i.

Из леммы 3 и определения процедуры P' следует, что c-дерево из $S = S(A)$, задаваемое X_1 и u_0 — искомое.

Доказательство леммы 3. Очевидно, если $d(S) < \infty$, то $d_1(S) < \infty$. Пусть $d_1(S) = k$.

Допустим, что $d(S) = \infty$. Тогда $\forall i\, d_{i+1}(S) > d_i(S)$. Рассмотрим $d_k(S) = \sup \sum_{i=1}^{\lambda(t)} d_{k-1}(S)$.

Так как $d_1(S) < \infty$, то $d_k(S) < \infty$. Пусть $d_k(S) = \sum_{i=1}^{\lambda(t_1)} d_{k-1}(S_{t_1, v_i^1})$. Очевидно, $\lambda(t_1) \geqslant 2$ (иначе $d_k(S) = d_{k-1}(S_{t_1 V_1^1}) \leqslant d_{k-1}(S)$ и $d(S)$ конечно, вопреки предположению).

Так как $d_k(S) > d_{k-1}(S)$, то для некоторого i

(4) $$d_{k-1}(S_{t_1 v_i^1}) > d_{k-2}(S_{t_1, v_i^1}).$$

Пусть (4) выполнено для $i=\alpha_1$. Обозначим $S_{t_1, v_{\alpha_1}^1}$ через S^1. Тогда

$$d_{k-1}(S^1) = \sum_{j=1}^{\lambda(t_2)} (S^1_{t_2, v_j^2}),$$

где t_2 – некоторое c-дерево из S^1. Аналогично предыдущему $\lambda(t_2) \geqslant 2$. Далее, аналогично существует α_2, такое, что

$$d_{k-2}(S^1_{t_2, v_{\alpha_2}^2}) > d_{k-3}(S^1_{t_2, v_{\alpha_2}^2}).$$

Обозначим $S^1_{t_2, v_{\alpha_2}^2}$ через S_2,

$$d_{k-2}(S^2) = \sum_{j=1}^{\lambda(t_3)} d_{k-3}(S^2_{t_3, v_j^3}),$$

где t_3 – некоторое c-дерево из S_2. Точно так же строим S^3, $S^4, \ldots, S^{k-1}$ и $t_4 \in S_3$, $t_k \in \in S_{k-1}$, такие, что $\lambda(t_j) \geqslant 2$ $(j=3, \ldots, k)$. Имеем $d_1(S^{k-1}) \geqslant \lambda(t_k) \geqslant 2$. Но $S^{k-1} = S^{k-2}_{t_{k-1}, v^{k-1}}$.

По определению $S_{t,v}$ существует $t'_{k-1} \in S^{k-2}$, для которого вместе с t_k, t_{k-1} выполнены свойства 2.1–2.4. Так как основа c-дерева – полное дерево и $\lambda(t_k) \geqslant 2$, то

$$\lambda(t'_{k-1}) \geqslant \lambda(t_k) + \lambda(t_{k-1}) - 1 \geqslant 3.$$

Аналогично существует $t'_{k-2} \in S^{k-3}$, такой, что $\lambda(t'_{k-2}) \geqslant 4, \ldots$, существует $t_1' \in S$, такой, что $\lambda(t_1') \geqslant k+1$ вопреки предположению, что $d_1(S) = k$. Лемма доказана.

Доказательство леммы 6. Нам понадобятся свойства семейства С1-С6, перечисленные выше.

Для построения ОМ-автомата, реализующего A, каждому $t \in S(A)$ сопоставим разбиение R_t на $\{1, \ldots, n\}$ так, чтобы было выполнено:

а) классы R_t находятся во взаимно-однозначном соответствии с вершинами верхнего яруса основы t;

б) если $W \in R_t$ и W соответствует вершина V, то $|W| \geqslant d(S_{t,\,v})$;

в) если $W \in R_t$, то $W = \{r+1, \ldots, r+S\}$, где $0 \leqslant r < r+S \leqslant n$;

г) если t – начало t_1, то R_{t_1} – измельчение R_t.

Определение R_t дадим индукцией по высоте t.

1. Если $l(t)=0$, то $R_t = \{\{1, \ldots, n\}\}$. Условия а) – в), очевидно, выполнены.

2. Пусть $t \in S(A)$ и z – начало t высоты $l(t)-1$. Тогда в силу С4 $z \in S(A)$ и по индуктивному предположению определено R_z; для R_z выполнено а) – г). R_t получается из R_z разбиением каждого класса $W \in R_z$ на более мелкие классы по следующему методу.

Пусть $W = \{r+1, \ldots, r+S\} \in R_z$ соответствует вершине V верхнего яруса z и в t из V ребра ведут в вершины V_1, $V_2, \ldots, V_k$; $d(S_{t,V_i}) = d_i (1 \leqslant i \leqslant k)$. Тогда разбиваем W на классы $W_1, \ldots, W_k$, где

$$W_i = \begin{cases} \{r+1 \ldots, r+d_1\}, & \text{если } j=1, \\ \{r+d_1+\ldots+d_{j-1}+1, \ldots, r+d_1+\ldots+d_j\}, & \text{если } j=2, \ldots, k-1, \\ \{r+d_1+\ldots+d_{k-1}+1, \ldots r+S\}, & \text{если } j=k. \end{cases}$$

Применяя описанную процедуру к каждому $W \in R_z$, получим R_t. Свойства а), в), г), очевидно, выполнены. Свойство б) также выполнено, так как $|W| \geqslant d(S_{t,V}) \geqslant \geqslant d_1 + \ldots + d_k$. Определение R_t закончено.

Фиксируем $\hat{\tau} \in \mathrm{T}$ и введем дополнительные обозначения. Пусть $t \in S(A)$; $j \in \in \{1, \ldots, n\}$.

1. $V_t(j)$ – вершина верхнего яруса основы t, соответствующая классу $W \in R_t$, в который входит j.

2. ρ_t^j – пометка на ребре, ведущем в $V_t(j)$, если $V_t(j)$ не Λ-вершина; $\hat{\tau}$, если $V_t(j)$ – Λ-вершина.

3. ρ_t^0 – T_0-пометка на ребре верхнего яруса t.

4. t_h – начало высоты h c-дерева t.

Сопоставим каждому c-дереву $t \in S(A)$ букву $\rho_t \in \mathrm{T}_0 \times \mathrm{T}^n$; слово $x_t \in (\mathrm{T}_0 \times \mathrm{T}^n)^*$, а также $\pi_t \subset \Sigma_0 \times \Sigma^n$ и $U_t \subset (\Sigma_0 \times \Sigma^n)^*$. Положим $\rho_t = \langle \rho_t^0, \rho_t^1, \ldots, \rho_t^n \rangle$; $\pi_t = \{\sigma \in \Sigma_0 \times \Sigma^n \mid \sigma_0$ совпадает с Σ_0-пометкой на ребре верхнего яруса t; $V_t(j)$ не Λ-вершина, то σ^j совпадает с Σ-пометкой на ребре, ведущем в $V_t(j)\}$;

$$x_t=\rho_{t_1}\ldots\rho_{t}, \qquad U_t=\{u=u_1\ldots u_{l(t)}\,|\,u_i\in\pi_{t_i}\}.$$

Фиксируем $\hat\sigma\in\Sigma$. В силу C5, C6 для любых $t\in S(A)$, $y\in U_t$, $\sigma_0\in\Sigma_0$ найдется c-дерево $z\in S(A)$, такое, что $y=\langle\sigma_0, \hat\sigma, \ldots, \hat\sigma\rangle\in U_z$.

Пусть $p\in(\Sigma_0\times\Sigma^n)^*$. Индукцией по $l(p)$ определим слово $\tilde p\in(\Sigma_0\times\Sigma^n)^*$:

1. $\tilde\Lambda=\Lambda$;

2. $\widetilde{p\sigma}=p\sigma$, если $p\sigma\bigcup\limits_{t\in S(A)}U_t$, $\widetilde{p\sigma}=\tilde p<\sigma^0, \hat\sigma\ldots, \hat\sigma>$ в противном случае.

Очевидно, для всех $p\in(\Sigma_0\times\Sigma^n)^*$ $l(\tilde p)=l(p)$ и $p\in\bigcup\limits_{t\in S(A)}U_t$. Теперь определим $F:(\Sigma_0\times\Sigma_n)^*\to(\mathrm{T}_0\times\mathrm{T}_n)^*$.

Пусть $p\in(\Sigma_0\times\Sigma^n)^*$, $\tilde p\in U_t$. Тогда $F(p)=x_t$.

Докажем, что такое определение корректно, т. е. что если $p\in U_t$ и $p\in U_t$, то $t=z$. Доказываем индукцией по $l(p)$. Если $p=\Lambda$, то все очевидно. Пусть для $p\in(\Sigma_0\times\Sigma^n)^*$ существует единственное c-дерево $t'\in S(A)$, такое, что $p\in U_t$; $\sigma\in\Sigma_0\times\Sigma^n$. Очевидно, если $p\sigma\in U_t\bigcap U_z$, то

(i) $l(p\sigma)=l(t)=l(z)$;

(ii) начала t и z совпадают и равны t';

(iii) Σ_0-пометки на ребре верхнего яруса t и z совпадают и равны σ^0.

В силу C1 t и z отличаются лишь, быть может, T_0- и Σ-пометками на ребрах верхнего яруса. Из определения $S_{t,V}$ видно, что если V' и V'' – вершины яруса, соответственно t и z, такие, что пути в них из корня имеют одинаковые Т-пометки, то $S_{t,V'}=S_{t,V''}$. Отсюда, так как $p\sigma\in U_t\bigcap U_z$, видно, что Σ-пометки на ребрах верхнего яруса t и z совпадают. Тогда в силу C2 $t=z$, т. е. F определено корректно.

Очевидно, построенный словарный оператор F детерминированный и, если $S(A)$ конечен, то ДСО F также имеет конечный вес. Так как для $S(A)$ верно C1, то автомат, реализующий F,– ОМ-автомат. Этот ОМ-автомат также будем обозначать F. Пусть $X\in k(\mathrm{T}, \Sigma)$ и $u_0\in\Sigma_0^*$ – произвольные и t – c-дерево из $S(A)$, задаваемое X и u_0. Тогда по определению t T_0-пометка на линии t совпадает с $A(x)(u_0)$. Индукцией по длине u_0 легко показать, что при работе F с X по схеме 1 над u_0 на вход F поступает $u\in U_t$. Тогда $S(F, X)(u_0)=F(u)=x_t{}^0=A(X)(u_0)$, т. е. F реализует A. Лемма доказана.

Автор выражает благодарность А. А. Мучнику за постановку задачи и А. Л. Семенову и А. А. Талю за помощь при подготовке работы к печати.

Поступила в редакцию
6 июня 1977 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Летичевский А. А.* Эквивалентность автоматов с заключительным состоянием. I. Кибернетика, № 4, стр. 18–24, 1966.
2. *Летичевский А. А.* Функциональная эквивалентность дискретных образователей. I, Кибернетика, № 2, стр. 15–16, 1969.
3. *Кобринский Н. Г., Трахтенброт Б. А.* Введение в теорию конечных автоматов. Физматгиз, 1962.
4. *Барздинь Я. М., Трахтенброт Б. А.* Конечные автоматы. Поведение и синтез. «Наука», 1970.
5. *Трахтенброт Б. А.* Об операторах, реализуемых в логических сетях. Докл. АН СССР, т. 112, № 6, стр. 1005–1007, 1957.
6. *Трахтенброт Б. А.* Конечные автоматы и логика одноместных предикатов. Сиб. мат. ж., т. 3, № 1, стр. 103–131, 1962.
7. *Ройтберг М. А.* Эквивалентность схем с одной обратной связью. Проблемы передачи информации, т. 12, вып. 2, стр. 80–89, 1977.

AUTOMATA CIRCUITS AND MAPPINGS REALIZED BY THEM

M. A. ROITBERG

The paper is concerned with the use of deterministic vocabulary mappings (DVM) which may be specified by feedback circuits. Each circuit is described by an automaton of special kind, the so-called circuit automaton. Circuit automata are referred to as circuit equivalent if they specify the same DVM transformation. The kind of transformations which can be specified by circuit automata is found. An algorithm for checking circuit equivalence of the automata and one for minimizing the number of feedbacks in the circuit which specifies the given DVM transformation are described.