Школа Молекулярной и Теоретической Биологии
II сезон
Пущино Август 2013 г.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ для НЕМАТЕМАТИКОВ
Этюд 1.

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ и ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОГРЕССИИ

М. А. Ройтберг.

Введение
[о чем стоило рассказать сначала]

Конечные и бесконечные объекты в математике. Ахиллес и черепаха [Зенон Элеат, Антисфен Афинянин, Александр Эфиоп (он же А.С. Пушкин)]. Конечная геометрическая прогрессия со знаменателем ½. Ее сумма. Бесконечная геометрическая прогрессия. Что такое сумма бесконечного ряда чисел? Сумма бесконечной геометрической прогрессии.

Мы будем изучать бесконечные последовательности, уравнения, которые описывают такие последовательности, а также, как устроены множества решений таких уравнений.

Занятие 1. 12 августа

1. Бесконечные последовательности и уравнения для них

1.1. Как задавать бесконечные последовательности?

Условия, описывающие числа (или конечные наборы чисел) – это уравнения. Например, условие $2x=6$ описывает число 3 (говорят, что 3 – *решение* этого уравнения). Для бесконечной последовательности нужно бесконечное количество уравнений. Что делать?

Можно записывать бесконечную серию уравнений, как одно уравнение, в которое входит число n – номер члена последовательности. Пример:

$$X_n = 2^{n-1} \qquad (A1)$$

Подразумевается, что уравнение (1) выполнено **для всех $n = 1, 2, \ldots$.** То есть (A1) – это **бесконечная** серия формул: $X_1 = 2^{1-1}$; $X_2 = 2^{2-1}$; ... $X_{100} = 2^{100-1}$; ...

Такие уравнения называются *явными* (иногда говорят – *явная формула последовательности).*

Зная явную формулу, можно вычислить любой элемент последовательности.

Мы говорим, что **последовательность задана**, если мы знаем, **как вычислить любой ее элемент**.

1.2. Рекуррентные уравнения.

Другой способ задания последовательностей – *рекуррентные уравнения* они же – *рекуррентные формулы*).

Рекуррентное уравнение имеет вид

$$X_n = \ldots$$

При этом в правой части уравнения присутствуют не только номер элемента n и числа, но и предыдущие члены неизвестной последовательности. Номера этих членов могут задаваться формулами относительно текущего номера n. Например,

$$X_n = 2*X_{n-1} \qquad (A2)$$

В рекуррентном уравнении (A2), в отличие от уравнения (A1), n не может быть любым числом: оно имеет смысл только при $n\geq2$, при $n=1$ это уравнение не имеет смысла. Если задавать последовательность, например, уравнением (A2), нужно отдельно задать значение X_1 (говорят – задать *начальное* условие). Множество всех последовательностей, которые описываются рекуррентным уравнением при различных начальных условиях, называется *множеством решений* рекуррентного уравнения.

Рекуррентное уравнение (при известных начальных условиях) позволяет вычислить значение любого элемента последовательности. Но, в отличие от явной формулы, делать это приходится постепенно: чтобы вычислить, например, 100-й элемент последовательности, придется сначала вычислить предыдущие 99.

Поэтому часто стараются, имея рекуррентную формулу для элементов последовательности, найти и ее явную формулу.

1.3. Пример: геометрическая прогрессия.

Геометрическая прогрессия – это последовательность, которая удовлетворяет разностному уравнению 1-го порядка, то есть уравнению вида

$$X_n = q*X_{n-1} \qquad (A3)$$

Иными словами, геометрическая прогрессия – это такая последовательность, в которой каждый член (начиная со второго) получается из предыдущего умножением на одно и то же число q. Это число называется *знаменателем* прогрессии.

Утверждение. Геометрическая прогрессия $\{ X_n\}$ со знаменателем q имеет вид

$$\{c, cq, cq^2, \ldots, cq^{n-1}, \ldots \},$$

где $c = X_1$ – число. То есть для элементов геометрической прогрессии, кроме рекуррентной формулы (A3), можно написать и явную формулу

$$X_n = cq^{n-1} \qquad (A4)$$

Доказательство проводится методом *математической индукции.* Про него можно написать отдельно.

2. Разностные уравнения

2.1. Разностное (оно же – линейное рекуррентное) уравнение 2-го порядка – это уравнение вида:

$$X_n = a*X_{n-1} + b*X_{n-2} \qquad (1)$$

где a, b – числовые коэффициенты.

Пример:

$$X_n = 5*X_{n-1} - 6*X_{n-2} \qquad (2)$$

Здесь $a = 5; b = -6.$

«Линейное» означает, что в правой части стоит сумма некоторого количества предыдущих членов, которые могут быть умножены на числовые коэффициенты – как в формулах (1) и (2).

«2-го порядка» означает, что в правой части встречается X_{n-2}, а X_{n-3} и «более дальние» члены не встречаются.

Решение разностного уравнения – это бесконечная (!) последовательность $\{X_n\}$ такая, что уравнение (1) выполнено для любых $n\geq3$.

2.2. По любым значениям для X_1 и X_2 можно «вырастить» решение уравнения (1), причем ровно одно. Примеры «выращенных» решений уравнения (2) приведены в таблице 1 (см. также Урок1-2.xlsx, лист «Урок 1»).

Наблюдение 1. Если умножить все элементы решения на число, снова получим решение.

Доказательство. Пусть $\{R_n\}$ – решение уравнения (1), то есть **для любого $n>2$** выполнено:

$$R_n = a*R_{n-1} + b*R_{n-2}$$

Пусть **для любого *n***

$$Q_n = k*R_{n-1}$$

Тогда **для любого *n>2*** выполнено:

$$a*Q_{n-1} + b*Q_{n-2} = a*(k*R_{n-1}) + b*(k*R_{n-2}) = k*(a*R_{n-1} + b*R_{n-2}) = k* R_n = Q_n$$

что и требовалось доказать.

N	Реш 1	Реш 2	Реш 3	Реш 4	Реш 5	Реш 6	Реш 7	Реш 8
1	0	2	1	0	3	5	3	20
2	0	5	2	1	9	10	6	50
3	0	13	4	5	27	20	12	130
4	0	35	8	19	81	40	24	350
5	0	97	16	65	243	80	48	970
…	…	…	…	…	…	…	…	…
Формула n-го члена	**0**	**???**	2^{n-1}	**???**	3^n	$5*2^{n-1}$	$3*2^{n-1}$	**10*Реш2[n]**

Таблица 1.

Продолжение следует

Упражнения.

1. Привести пример разностного уравнения 2-го порядка. Написать для него решения, которые начинаются с (в каждом случае написать 5 первых членов):
   а) {0, 1}; б) {1, 0}; в) {1, 1}; г) {0, 0}
2. То же задание для своих начальных значений
3. Какие из следующих рекуррентных уравнений являются линейными? Определите порядок приведенных уравнений.

а) б) в) г)

[НЕ ДОПИСАНО]

Занятие 2. 13 августа

3. Геометрические прогрессии

3.1. Геометрические прогрессии – решения уравнения (2)

Геометрическая прогрессия – это последовательность, которая удовлетворяет разностному уравнению 1-го порядка, то есть уравнению вида

$$X_n = q*X_{n-1}$$

Геометрическая прогрессия имеет вид $\{c,\ cq,\ cq^2,\ \ldots,\ cq^{n-1},\ \ldots\ \}$, где $c,\ q$ – числа. Число q называется *знаменателем* прогрессии.

У уравнения (2) нашлось два решения, которые являются геометрическими прогрессиями. Эти прогрессии имеют знаменатели 2 и 3. В силу Наблюдения 1, первый элемент прогрессий может быть любым. На прошлом занятии мы заметили, что решения уравнения (2), выращенные из {1, 2} и {3, 9} являются геометрическими прогрессиями (по крайней мере, в начале). Но мы не **доказывали,** что вся бесконечная последовательность, которая вырастает из этих начальных данных, будет геометрической прогрессией. Это можно доказать методом математической индукции.

Может быть, у уравнения (2) есть еще решения, которые являются геометрическими прогрессиями? Как искать такие решения у других разностных уравнений вида (1)?

3.2. Утверждение о геометрических прогрессиях и разностных уравнениях.

Утверждение 1. Пусть дано разностное уравнение

$$X_n = a\bullet X_{n-1} + b\bullet X_{n-2} \tag{1}$$

Геометрическая прогрессия $X_n = c\bullet q^{n-1}$ является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда q является корнем многочлена

$$q^2 - a\bullet q - b, \tag{3}$$

то есть решением уравнения

$$q^2 – a\bullet q - b = 0 \tag{4}$$

Этот многочлен называется *характеристическим многочленом* уравнения (1).

Доказательство. Пусть последовательность $\{\ c\bullet q^{n-1}\}$ является решением уравнения (1). Это означает, что для всех $n = 3, 4, \ldots$ выполнено:

$$c\bullet q^{n-1}= a\bullet\ c\bullet q^{n-2} + b\bullet\ c\bullet q^{n-3}$$

Сократим на $c\bullet q^{n-3}$. Получим:

$$q^2 = a\bullet q + b$$

откуда следует:

$$q^2 – a\bullet q - b = 0$$

Что и требовалось доказать.

4. Как получать новые решения. Продолжение.
[игра с таблицей решений на доске]

Продолжим то, что было в конце первого занятия – будем наблюдать решения, выращенные из различных начальных данных и искать связи между ними. См. таблицу 2 ((см. также Урок1-2.xlsx, лист «Урок 2»).

Можно заметить, что

[Реш 9] = [Реш 8] + [Реш 5]
[Реш 10] = (10/3)*[Реш 5] + [Реш 3]

То есть, новые решения (иногда?) можно получать не только умножением известных решений на число, но и сложением решений.

n	Реш 2	Реш 3	Реш 4	Реш 5	Реш 6	Реш 7	Реш 8	Реш 9	Реш 10
1	2	1	0	3	5	3	20	23	12
2	5	2	1	9	10	6	50	59	35
3	13	4	5	27	20	12	130	157	103
4	35	8	19	81	40	24	350	431	305
5	97	16	65	243	80	48	970	1213	907
…	…	…	…	…	…	…	…	…	…

Таблица 2

Продолжение следует

Упражнения (не давались, часть можно было сделать на занятии – если есть время ☺). В квадратных скобках – решения.

1. Дано разностное уравнение 2-го порядка. Найти все геометрические прогрессии, которые являются решениями этого уравнения. Ввиду утверждения 1, здесь «найти геометрическую прогрессию» означает «найти знаменатель геометрической прогрессии».

а) $X_n = 7*X_{n-1} - 10*X_{n-2}$; [2, 5]
б) $X_n = 15*X_{n-1} - 50*X_{n-2}$; [5, 10]
в) $X_n = 3*X_{n-1} + 10*X_{n-2}$; [-2, 5]
г) $X_n = (9/2)*X_{n-1} - 2*X_{n-2}$; [4, 1/2]
д) $2*X_n = 9*X_{n-1} - 4*X_{n-2}$; [4, 1/2]
е) $X_n = 3*X_{n-1} - 2*X_{n-2}$; [2, 1]
ж) $X_n = X_{n-1} + 2*X_{n-2}$; [2, -1]
з) $X_n = -7*X_{n-1} - 10*X_{n-2}$; [-2, -5]
и) $X_n = X_{n-2}$; [1, -1]
к) $X_n = 9*X_{n-2}$; [3, -3]
л) $X_n = 6*X_{n-1} - 9*X_{n-2}$; [3]
м) $X_n = 6*X_{n-1} - 10*X_{n-2}$; [прогрессий нет]
н) $X_n = -X_{n-2}$; [прогрессий нет]
* есть решение $X_n = sin(n*\pi/2)$

2. Придумать разностное уравнение 2-го порядка, у которого есть решения – геометрические прогрессии со знаменателями 4 и 5. Сколько есть таких решений?

Занятие 3.
14 августа

5. Компьютерные эксперименты.

Мы хотим понять, как ведут себя решения уравнения (2) и других уравнений вида (1) в зависимости от начальных условий. Для этого будем делать компьютерные эксперименты.

5.1. Инструментарий. Логарифмический масштаб.

См. Урок 3.xlsx, листы «Основная таблица» и «Пояснения».

Графики решений. Невозможность увидеть графики, кроме «самого большого» даже начальный фрагмент «самого большого» графика (лист Таб.3.1)..

Переход к «*логарифмическому масштабу»* по оси ординат, то есть построение графиков функции $log_2 f(x)$ вместо графика функции $f(x)$. График функции $y = c*q^n$ – это прямая $y = log_2 c + (log_2 q)*n$, см. лист Таб 3.2.

5.2. Общая схема экспериментов

Наблюдаем за графиками решений в уравнения (2) **в логарифмическом масштабе по оси ординат** (лист 3.2), то есть изображаем графики **логарифмов** (по основанию 2) **от функций.** Изображаем графики для геометрических прогрессий $G2 = \{1, 2, \ldots, 2^{n-1}, \ldots\}$ и $G3 = \{1, 3, \ldots, 3^{n-1}, \ldots\}$, а также график еще одного решения R. Графики для решений $G2$ и $G3$ – это прямые с уравнениями соответственно $y = n$ и $y = (log_2 3)*n$. Прямые проходят через начало координат. Прямая для $G2$ идет выше.

Следить сразу за двумя параметрами (то есть за значениями X_1 и X_2) трудно. Будем следить за изменением X_2; значение X_1 постоянно будет равным 1. Потом можно будет (если захотим) повторить то же для других значений X_1.

6. Графики решений разностных уравнений

6.1. Решения с начальными значениями вида {1, t}, где t>>0.

Наблюдение: график для любого такого решения R «на бесконечности» – («на глаз») прямая, параллельная прямой для $G3$, то есть имеет уравнение $y = (log_2 3)*(n-1) +d$. В начале график «болтается», но довольно быстро выходит на прямую. Таким образом, значения $G3$ при больших n (примерно: $n \geq 10$) *приближенно* равны $k*3^{n-1}$; здесь $k = 2^d$.

Выясняем зависимость сдвига d от начального значения $R_2 = t$ – экспериментируем с разными значениями t (см. лист таб. 3.2). Выясняем, что d растет с ростом t, но растет медленно. Вопрос: как нужно изменить t, чтобы d увеличилось на 1? Наблюдение: t нужно увеличить в два раза.

Вспоминаем, что

$$R_n \approx 2^d*3^{n-1} \qquad (3.1)$$

Это значит, что при увеличении R_2 в два раза, значение R_n при больших n тоже увеличивается в два раза.

НО! Мы уже знаем (см. занятие 1, Утверждение 1), что есть решение, **все элементы** которого больше элементов R_n в два раза. А у нас R_2 увеличился в два раза, а R_1 не изменился. Что это значит? Что равенство (3.1) приближенное. Видимо,

$$R_n = k*3^{n-1} + f(n)$$

где значения $f(n)$ с ростом n «играют все меньшую роль» по сравнению с $k*3^{n-1}$. Что значит «все меньшую роль» нужно уточнить.

6.2. Контроль наблюдений.

У нас в задаче были две «двойки» - основание логарифма и один из знаменателей. С какой из этих двоек связан эффект удвоения t для того, чтобы увеличить d на 1? Выполняем те же эксперименты для разностного уравнения $X_n = 15*X_{n-1} - 50*X_{n-2};$ [решения 5, 10].

И еще раз – для других уравнений. Скажем, $X_n = 7*X_{n-1} - 10*X_{n-2};$ [2, 5]

6.3. Новые вопросы. Планирование новых экспериментов.

1) Здесь – на примере уравнения $X_n = 7*X_{n-1} - 10*X_{n-2};$ [2, 5]

Мы поняли, что при $t>5$ прямая (в логарифмическом масштабе на «бесконечности») пойдет параллельно прямой для прогрессии G5 и выше ее. Что будет, если $t<5$? Видимо, нужно отдельно рассмотреть случаи $2<t<5$ (см. лист 3.3) и $t<2$ (см. листы 3.4).

2*) У нас есть известные решения для некоторых начальных условий. Будем как-то комбинировать начальные условия. Как будут зависеть новые решения от старых?

Знаем: если оба начальных значения умножить на одно и то же число, то все решение умножится на это число.

Гипотеза (см. таб.2): если сложить два набора начальных условий, то новое решение будет суммой решений. Проверим на экспериментах. Подтверждается!

Пора строить теорию.

Продолжение следует

Занятие 4. 15 августа

7. Основные свойства решений

Теорема 1.

Пусть $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ - решения уравнения (1).
Пусть α, β – числа.
Пусть $\{S_n\}$ - последовательность.
Тогда:

А. Если **для любого *n*** выполнено:
$S_n = \alpha * P_n$
то $\{S_n\}$ - решение уравнения (1).

Б. Если **для любого *n*** выполнено:
$S_n = P_n + Q_n$
то $\{S_n\}$ - решение уравнения (1).

В. Если **для любого *n*** выполнено:
$S_n = \alpha * P_n + \beta * Q_n$
то $\{S_n\}$ - решение уравнения (1).

Теорема 2.

Пусть $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ - решения уравнения (1).
Пусть α, β – числа
Пусть $\{S_n\}$ - решение уравнения (1).

А. Если выполнено:
$S_1 = \alpha * P_1$ и $S_2 = \alpha * P_2$
то **для любого *n*** выполнено:
$S_n = \alpha * P_n$

Б. Если
$S_1 = P_1 + Q_1$ и $S_1 = P_2 + Q_2$
то **для любого *n*** выполнено:
$S_n = P_n + Q_n$

В. Если
$S_1 = \alpha * P_1 + \beta * Q_1$ и $S_1 = \alpha * P_2 + \beta * Q_2$
то **для любого *n*** выполнено:
$S_n = \alpha * P_n + \beta * Q_n$

Теорема 3.

А. Пусть $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ - решения уравнения (1), такие что
$P_1 = 1;\ P_2 = 0;$
$Q_1 = 0;\ Q_2 = 1;$
Пусть $\{S_n\}$ – произвольное решение уравнения (1).
Пусть α, β – числа, причем $\alpha = S_1$; $\beta = S_2$.

Тогда **для любого *n*** выполнено:
$S_n = \alpha * P_n + \beta * Q_n$

Б. Пусть $\{P_n\}$ и $\{Q_n\}$ - решения уравнения (1), такие что

$$P_1 = 1;\ \ P_2 = p;$$
$$Q_1 = 1;\ \ Q_2 = q,$$

где $p \neq q$.

Тогда найдутся такие числа α, β, что **для любого *n*** выполнено:

$$S_n = \alpha * P_n + \beta * Q_n$$

4.2. Практика

Кумир-программы (проверка теорем);

EXCEL: подбор коэф α и β для решений с начальными значениями $\{1, 0\}$ и $\{0, 1\}$

Занятие 5
17 августа

Общая формула для решения разностного уравнения 2-го порядка

2.1. Через (1,0)-решение и (0,1)-решение

2.2. Через геометрические прогрессии.

Решение системы линейных уравнений

2.3* Объяснение компьютерных экспериментов.

Занятие 6
18 августа

Уравнение Фибоначчи и числа Фибоначчи.

Занятие 7
19 августа

(Полу)самостоятельная работа. Учимся задавать вопросы.
Разбор контрольного примера
Дано уравнение

$$X_n = (3/2)*X_{n-1} – (1/2)*X_{n-2} \qquad (3)$$

и начальные условия:

$$X_1 = 10; \; X_2 = 9$$

Найти X_{1000} с точностью до 0.001

Занятие 8
20 августа

Подведение итогов. Системы разностных уравнений.