М. РОЙТБЕРГ,
г. Пущино, Московская обл.

«Пойди туда — не знаю куда, принеси то — не знаю что»

С чего все началось

У меня есть коллега — мама 6-летней дочки-первоклассницы. Она (мама) прислала мне задачу «для поступления в первый класс»: кто решит — поступил, остальные остаются в детском саду. Задача (в том виде, в котором мне ее прислали) выглядит так:

85 – 2
56 – 1
38 – 2
54 – 0
89 – 3
16 – 1
----
94 – ?

Оставим в стороне вопрос о разумности экзаменов в детском саду, посмотрим внимательнее на саму задачу. Подобные задачи типа «угадай закономерность» сейчас весьма популярны и часто трактуются как средство развития «творческого мышления» в математике. Настоящий текст — (предварительная) попытка на примере одной задачи выяснить, что происходит при «угадывании закономерностей», что именно тренируется.

Начну с себя. «Правильного» решения (то есть того, на которое рассчитывали авторы) я не нашел (подумав минут 10–15). Хотя мама, которая дала мне эту задачу, сказала, что она сама эту задачу решила. И еще два ее знакомых решили (а многие не решили). То есть три человека, не сговариваясь, нашли здесь некоторую достаточно простую закономерность. Я эту закономерность не нашел (хотя и старался!). Зато нашел несколько других решений.

Решения

Решение 1. Все определяет последняя цифра.
Ответ: 94 – 0.

Решение 2. Все определяет бóльшая цифра (т.е. та из двух, которая больше).
Ответ: 94 – 3.

Комментарий. К этим решениям легко прийти, если разбить данные 6 примеров на группы с общим ответом:

0 – 54
1 – 16, 56
2 – 38, 85
3 – 89

Такой прием работы с данными важен и полезен в разных ситуациях. Но проявление подобных приемов *никогда* не происходит при разборе задач на угадывание закономерностей.

Решение 3. Попробуем как-то сузить класс закономерностей — угадать, что могут иметь в виду авторы. Например, предположим: «Наверное, каждая цифра приносит сколько-то очков». Тогда:

54 – 0 ⇒ 5 и 4 очков не дают;
85 – 2 ⇒ 8 дает 2 очка;
56 – 1 ⇒ 6 дает 1 очко;
38 – 2 ⇒ 3 очков не дает;
89 – 3 ⇒ 9 дает 1 очко;
16 – 1 ⇒ 1 очков не дает.

Ответ: 94 – 1.

Обсуждение решений

Фактически от нас (и 6-летнего ребенка) требуют продолжить «по закономерности» функцию, которая переводит натуральные числа (аргументы) в новые натуральные числа (значения функции). Понятно, что это можно сделать бесконечным количеством способов. Значит, подразумеваются некоторые неявные ограничения. Какие именно ограничения имеются в виду, в задаче не сказано. Таким образом, это не задача, а *загадка* («сидит девица в светлице, коса наружу» — это морковка? петрушка? А может, ведро в колодце и цепь, которая на вороте?). По моим наблюдениям, часть детей «чувствуют» неполноту условия и отказываются решать подобные задачи.

Вообще, реакция детей на неполноту (некорректность) условия задачи, которую они ощущают, но не могут вербализовать, — по-моему, очень интересная тема. При этом неполнота условия может быть «объективной» (как в рассматриваемой задаче), так и субъективной (условие задачи: «Сколько будет два умножить на два?» — неполно для тех, кто не знает, что такое «умножить»). С другой стороны, любое условие задачи (как и любой текст), *как правило*, неполно, то есть не самодостаточно. Всегда неявно подразумевается контекст, основанный на жизненном опыте читателя. И при неадекватности такого опыта происходит неудача с пониманием текста — будь то «Евгений Онегин», лекции по квантовой механике или задача из учебника для первого класса.

Тем не менее некоторые люди, независимо друг от друга, выдают одинаковые решения рассмотренной задачи (как и приведенной выше загадки). Значит, есть некоторые «естественные» и подразумеваемые (по крайней мере, частью решающих) ограничения на класс допустимых функций. Попробуем описать эти ограничения.

Одна из возможностей — «минимизация» «сложности» описания функции. Здесь «минимизация» означает «хорошо бы попроще», а «сложность» включает, по-видимому, какие-то предположения о психологии и математической (а также «общечеловеческой») подготовке ребенка: для одних проще одно, для других — другое. Например, я думаю, что решения 1 и 2 сложны для детей (психологически), но не берусь это обосновать.

Это — не единственное ограничение. Например, все три приведенных решения описывают функции, зависящие от параметров (значений этих функций на цифрах). Условия задачи не позволяют, например, однозначно определить ответ для числа 77. Это (отсутствие единственного «продолжения») можно считать недостатком и попытаться сформулировать соответствующее ограничение.

Таким образом, центральная проблема в анализе задач «угадай закономерность» — максимально полно «проявить» неявный пласт ограничений на рассматриваемый класс функций, подразумеваемый а) авторами, б) решающими — детьми разных возрастов и взрослыми.

Еще одно решение и новые задачи

Решение 4. Это решение я придумал, чтобы обосновать, сколько очков приносит каждая цифра. Простейшая (и стандартная для олимпиадных математических задач) идея — посмотреть на буквы в записи чисел словами. Оказалось, что приведенные ответы получаются, если учитывать количество букв В, М и Ш или В, О и Ш (а остальные не считать). Это решение, если забыть про необходимость выбора между В, М, Ш и В, О, Ш, позволяет естественно определить значения искомой функции для чисел меньше миЛЛиона (неизвестно, нужно ли считать букву Л). Но — еще одно ограничение! — оно вряд ли доступно шестилеткам.

Вместо самого решения, я сформулирую новую задачу, которая мне нравится больше исходной. В отличие от исходной «загадки», она действительно является математической задачей.

Задача М1. У Васи есть любимые буквы. Вася стал считать, сколько его любимых букв есть в записи словами разных чисел. Получилось вот что:

85 – 2 любимых буквы;
56 – 1 любимая буква;
38 – 2 любимых буквы;
54 – любимых букв нет;
98 – 3 любимых буквы (если, как было, 89 – 3, то появляется побочное решение);
16 – 1 любимая буква.

Сколько Васиных любимых букв в записи словами числа 94?

Решение. Запишем алфавит и будем вычеркивать те буквы, которые точно не являются любимыми. Отдельно будем записывать кандидатов в любимые буквы. (Для простоты я нелюбимые тоже буду давать списком.)

54: нелюбимые: П Я Т Ь Д Е С Ч Ы Р;
56: Ш – любимая;
16: Н А Ц – нелюбимые;
85: среди В О М – 2 любимых буквы;
38: И – нелюбимая;
98: В и два О из слова «девяносто» должны давать одну любимую букву (из-за этого и заменили 89 на 98).

Вывод: В – любимая, О – нет. Значит (см. 85), М – любимая.

Итак:
любимые: В М Ш;
нелюбимые: А Д Е И Н О П Р С Т Ц Ч Ы Ь Я;
неизвестно: Г Ё Ж З К Л М У Ф Х Ш Щ Ъ Э Ю.

Ответ: в словах «деВяносто четыре» 1 любимая буква.

Варианты задач

Задача М2. У Васи есть три любимые буквы. Вася стал считать, сколько его любимых букв есть в записи словами разных чисел.

Получилось вот что:

85 – 2 любимых буквы;

56 – 1 любимая буква;

38 – 2 любимых буквы;

54 – любимых букв нет;

98 – 3 любимых буквы (если, как было, 89 – 3, то появляется побочное решение);

16 – 1 любимая буква.

Сколько Васиных любимых букв в записи словами числа 94? Какие буквы Вася считает любимыми?

Задача М3 (*продолжение предыдущей*). Петя добавил к трем Васиным любимым буквам четвертую. После этого для некоторых чисел ответ изменился. Какую букву добавил Петя? Приведи пример числа, для которого ответ изменился.

Подводящие задачи

Задача П1. Какие буквы используются в записи словами чисел от 1 до 3? Какие буквы не используются в записи этих чисел? Те же вопросы для чисел от 1 до 10.

Задача П2. В радуге 7 цветов: красный, оранжевый, жёлтый, зелёный, голубой, синий, фиолетовый. Какие буквы не используются в записи этих цветов?

А эту задачу («загадку») я придумал «в знак протеста».

Задача Т1. Угадай закономерность:

11 – 1
71 – 1
81 – 0
83 – 1
13 – 0
411 – 1
711 – 0
15 – 1
----
47 – ???
147 – ???
95 – ???
2712 – ???

Потратьте, пожалуйста, на нее 1 минуту (в крайнем случае пять, больше не стоит). В конце текста приведена подсказка.

«Правильное решение», или На всякого мудреца не накинешь платок

Когда я закончил писать первый вариант этого текста (дня через два после того, как получил задачу), сообразил, что за решение имели в виду авторы задачи. С точки зрения математики — это решение 3. Но количество баллов, приписываемое каждой букве, обосновывается вовсе не так, как это делается в данном решении. Все проще: нужно считать «колечки» в цифрах. Тогда:

1, 2, 3, 4, 5, 7 – 0 баллов (нет колечек);

6, 9 – 1 балл (одно колечко);

8 – 2 балла (два колечка).

Остается неясным, как трактовать 0: считать его одним колечком, двумя (потому что в два раза больше) или вообще не считать (потому, что это не колечко, а вытянутый овал). Но вряд ли кто-то из детей по этому поводу задумается.

Что еще интересно в таком решении? Левые части исходных примеров (85, 56 и т.д.) можно трактовать тремя способами:

1) как числа в десятичной записи — что наиболее привычно для людей, начиная со второго класса (и для многих более юных);

2) как пару цифр — безотносительно к использованию десятичной системы записи чисел (как это сделано в решениях 1 и 2);

3) просто как рисунок (вариант — рисунок, состоящий из двух фигурок).

Оказывается, авторы имели в виду именно третью трактовку! При этом для правых частей используется совсем другая (первая!) трактовка. Хорошо ли проделывать с детсадовцами такие трюки?

Вот, собственно говоря, и все. В конце полагается делать выводы. Пока воздержусь.

Подсказка к задаче Т1. Автор родился 27 декабря.

ФОТО НА КОНКУРС

Нет, я не Гаусс, я ... другой!
Автор: О.А. Ефремова,
Яблоновская основная школа, Саратовская обл.