КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ НА РУБЕЖЕ ВЕКОВ

В.А. УСПЕНСКИЙ, В.Б. ШЕХТМАН[1]

Кафедра математической логики и теории алгоритмов (первоначальное название — “кафедра математической логики”) была создана на механико-математическом факультете в апреле 1959 г. и имеет довольно богатую историю. Настоящий обзор отражает историю кафедры в целом, но о первом ее периоде (примерно до начала 1980-х гг.) говорится более сжато, поскольку он освещен в обзоре [K+92][2].

I. Предыстория.

Кафедра образовалась на основе трех логико-математических школ, во главе которых находились выдающиеся ученые: Андрей Николаевич Колмогоров (1903-1987), Петр Сергеевич Новиков (1901-1975), Андрей Андреевич Марков (1903-1979). Эти школы сложились в неодинаковых условиях и сильно отличались друг от друга. Различие школ отразилось на широте научной и педагогической деятельности кафедры: она охватывает все разделы современной математической логики - и в теоретических, и в прикладных аспектах.

Становление математической логики в Советском Союзе происходило задолго до создания кафедры. В Московской математической школе, центром которой был Московский университет, имелся устойчивый интерес к теоретико-множественной проблематике. Переход от теории множеств к проблемам основания математики был достаточно естественным. Так, один из создателей Московской школы Н.Н. Лузин долгие годы занимался знаменитой проблемой континуума и много думал о роли аксиомы выбора в теории множеств. Выдвинутая им гипотеза (впоследствии блестяще подтвердившаяся), что на ряд вопросов дескриптивной теории множеств в принципе нельзя дать однозначный ответ, исходя из традиционных аксиом теории множеств, значительно стимулировала исследования по математической логике.

Две работы молодого А.Н. Колмогорова (который был учеником Н.Н. Лузина, начиная со 2-го курса университета) были посвящены интуиционистской логике. Автор пришел к данной теме самостоятельно, но этот выбор был связан с философскими проблемами оснований математики, которые в тот период были особенно актуальны. Достаточно вспомнить, что к этой области относились две первые проблемы Гильберта: проблема континуума и проблема непротиворечивости арифметики. Обе работы Колмогорова сыграли значительную роль в математической логике. В ранней работе [K25] была впервые построена система аксиом интуиционистской логики и впервые же — погружение классической логики в интуиционистскую — известный *негативный перевод*, независимо (и чуть позже) открытый также К. Геделем. Во второй работе [K32] предложен конструктивный подход к семантике интуиционистской логики: она интерпретируется не как логика *утверждений*, а как логика *задач*. Позднее эта идея привела ко многим замечательным результатам, о которых сказано ниже.

---

[1] Авторы благодарны Н.К. Верещагину, М.В. Вьюгину, Е.Г. Драгалиной-Черной, В.Н. Крупскому, М.Р. Пентусу, В.Е. Плиско, А.Х. Шеню за предоставленные материалы и помощь в работе над этой статьей.

[2] При подготовке текста использовался также обзор [У97].

Как известно, в дальнейшем А.Н. Колмогоров получил фундаментальные результаты в разнообразных областях математики. В начале 1950-х гг. он начал заниматься теорией алгоритмов и привлек в эту область своих учеников Ю.Т. Медведева и В.А. Успенского. В 1953/54 учебном году в МГУ действовал семинар по рекурсивной арифметике под руководством А.Н. Колмогорова и В.А. Успенского. Именно на этом семинаре А.Н. Колмогоров впервые сформулировал общее понятие нумерации и понятие арифметической сводимости нумераций и тем самым заложил основы теории нумераций. С 1954/55 учебного года В.А. Успенским читались спецкурсы по теории алгоритмов.

П.С. Новиков, который также был учеником Лузина, начинал свою научную деятельность исследованиями в дескриптивной теории множеств и пришел к логической и алгоритмической проблематике позднее, под влиянием основополагающих работ Гёделя. В начале 1940-х гг. он разработал метод доказательства непротиворечивости формальных теорий и получил ряд результатов о непротиворечивости для арифметических теорий. В 1951 г. им была доказана независимость от теории множеств гипотезы о существовании совершенного ядра в дополнениях к аналитическим множествам (называемым также А-множествами, или суслинскими множествами). В 1952 г. он получил выдающийся результат, удостоенный Ленинской премии (1957 г.): была построена конечно представленная группа с неразрешимой проблемой тождества слов.

Рядом с А.Н. Колмогоровым и П.С. Новиковым у истоков математической логики в Московском университете стояли И.И. Жегалкин и С.А. Яновская. Жегалкин занимался классической логикой высказываний и частными случаями проблемы разрешения в логике предикатов. Работы Яновской относятся к истории и философии математики, но именно она была инициатором многих изданий по математической логике и отстаивала право математической логики на существование в трудные сталинские времена. В 1936 г. она прочла первый курс математической логики на механико-математическом факультете и каждый год читала новые спецкурсы, а в 1943 г. вместе с Жегалкиным организовала существующий и поныне научно-исследовательский семинар по математической логике.[3] Этот семинар оказал большое влияние на развитие математической логики и теории алгоритмов в нашей стране. Именно здесь формировалась научная школа П.С. Новикова. Здесь он впервые изложил построение конечно определенной группы с неразрешимой проблемой тождества слов (1952-53), а А.А. Мучник (в то время - аспирант Новикова) - решение проблемы сводимости Поста (1956).

Огромную роль в становлении математической логики в МГУ сыграли спецкурсы, прочитанные П.С. Новиковым в конце 1940-х - начале 1950-х гг.; некоторые из них позднее легли в основу монографий [Новиков, 1959], [Новиков, 1977]. Сложнейший материал преподносился на лекциях Новикова чрезвычайно доходчиво, с редким педагогическим мастерством. Эти лекции оказывали на слушателей большое эмоциональное воздействие своей философской и математической глубиной. Нередко лекция прерывалась вопросами с места, на

[3] Первоначально семинаром руководили И.И. Жегалкин (по 1947 г.), П.С. Новиков и С.А. Яновская. S 1959 г. в состав руководителей вошел А.А. Марков. С 1980 г. руководителями семинара были А.Н. Колмогоров (по 1987 г.), С.И. Адян и В.А. Успенский.

которые лектор подробно и охотно отвечал. Всё это создавало неповторимую демократическую атмосферу, при которой слушатели приглашались соучаствовать в процессе творчества.

На развитие математической логики и теории алгоритмов в Московском университете во второй половине 1950-х гг. существенно повлияли два события: Третий Всесоюзный математический съезд, состоявшийся в МГУ летом 1956 г., и переезд из Ленинграда в Москву (в конце 1955 г.) А.А. Маркова. Оба эти события слились в темпераментное выступление А.А. Маркова на заключительном заседании съезда о праве математической логики на административное оформление. Выступление Маркова (а также шаги, предпринятые вслед за тем Марковым, Новиковым, Яновской и др.) привело к открытию отдела математической логики во главе с Новиковым в Математическом институте им. Стеклова АН СССР (1957 г.) и открытию первой в нашей стране кафедры математической логики во главе с Марковым на механико-математическом факультете МГУ (1959 г.).

А.А. Марков к моменту своего переезда в Москву уже был всемирно известным ученым. Глубокий интерес к основаниям математики возник у него еще в предвоенное время. В 1940-е гг. он пришел к уточнению интуиционистской концепции математики Брауэра - Вейля на основе понятия алгоритма. Им и созданной им сначала в Ленинграде, а затем в Москве, научной школой была проделана огромная работа по развитию нового *конструктивного* направления в математике и — в первую очередь — в математической логике. Одновременно с этим Марков развивал теорию алгоритмов. В 1947 г. он установил неразрешимость знаменитых алгоритмических проблем Туэ: проблемы тождества и проблемы изоморфии для полугрупп. Введенные им в 1951 г. нормальные алгорифмы оказались одной из наиболее простых формализаций общего понятия алгоритма. Монография Маркова [Марков, 1954] подытожила ленинградский период его деятельности в этой области.

Таким образом, открытие кафедры математической логики было подготовлено предыдущей деятельностью Колмогорова, Новикова, Яновской и их учеников, а также работами и выступлениями Маркова.

II. Состав кафедры

До 1979 г. заведующим кафедрой был член-корр. АН СССР Андрей Андреевич Марков, в 1979-87 гг. - академик Андрей Николаевич Колмогоров, в 1987-93 гг. - академик Владимир Андреевич Мельников. С 1993 г. кафедрой заведует профессор Владимир Андреевич Успенский.

Кафедра имеет следующий состав: академик РАН профессор С.И. Адян, профессор Н.К. Верещагин, доцент В.Н. Крупский, доктор физ.-мат. наук М.Р. Пентус, доцент В.Е. Плиско, профессор В. А. Успенский, старший лаборант Р.А. Чистякова, профессор В.Б. Шехтман, доцент Т.Л. Яворская.

С 1995 г. в составе кафедры действует лаборатория логических проблем информатики, которой руководит профессор С.Н. Артемов; ее сотрудниками являются В.Н. Крупский, М.Р. Пентус, В.Б. Шехтман, Т.Л. Яворская, Р.Э. Яворский.

III. Преподавательская и учебно-методическая работа

Как уже отмечалось, преподавание математической логики и теории алгоритмов на механико-математическом факультете активно велось еще до создания кафедры. С появлением кафедры эта деятельность была систематизирована.

Большую педагогическую работу взял на себя А.А. Марков. Как вспоминает Н.М. Нагорный, "…он не любил читать "короткие" двухчасовые лекции и обычно читал их по 4 часа подряд. Бывали дни, когда после такой лекции еще 4 часа длился наш с ним общий семинар по конструктивной математике, затем все это, как правило, перерастало в разговор с аспирантами и студентами, и лишь вечером Марков уезжал домой, где тоже успевал поработать." [Марков, Нагорный 1996, с. XXIII]

С начала 1970-х гг. по инициативе А.Н. Колмогорова в обязательную программу 2-го семестра был включен курс "Введение в математическую логику" . Впервые он был прочитан в весеннем семестре 1972 г. А.Н. Колмогоровым, и затем (в разных вариантах) читался А.А. Марковым, О.Б. Лупановым, В.А. Успенским, А.Г. Драгалиным, С.Н. Артемовым, Н.К. Верещагиным. Этот курс обычно включает начальные сведения из логики высказываний и логики предикатов, а также из теории алгоритмов и теории множеств. По материалам этого курса были изданы учебные пособия [Колмогоров, Драгалин 1982], [Колмогоров, Драгалин 1984], [Марков 1984], [Успенский, Верещагин, Плиско 1991], [Верещагин, Шень 1999].

На протяжении многих лет кафедрой читается также спецкурс "Математическая логика" (8-й семестр); в последние годы этот курс читал академик С.И. Адян. Этот курс близок к обязательному, так как его обычно посещает и сдает около половины студентов-математиков. В курсе излагаются основы теории моделей и теории доказательств, включая теоремы Гёделя о полноте исчисления предикатов и неполноте арифметических теорий.

В 1960-70-е гг. кафедрой читались спецкурсы по целому ряду направлений: конструктивная логика и конструктивная математика (А.А. Марков, Б.А. Кушнер), теория алгоритмов (А. А. Марков, Н.М. Нагорный, В. А. Успенский), алгоритмические проблемы алгебры и комбинаторная теория групп (С.И. Адян), курсы общелогического характера (С.А. Яновская, В.А. Успенский) и др. В период 1970-80 гг. пользовались популярностью спецкурсы А.Г. Драгалина, посвященные интуиционизму, теории доказательств, разрешимым логическим теориям, аксиоматической теории множеств. В его лекциях безупречное изложение технически трудного материала сочеталось с глубиной видения философии математики[4]. В 1990-е гг. активно читали спецкурсы С.И. Адян, С.Н. Артемов, Л.Д. Беклемишев, Н.К. Верещагин, В.А. Любецкий, М.Р. Пентус, В.Е. Плиско, В.А. Сухомлин, В.А. Успенский, А.Х. Шень, В.Б. Шехтман. В них излагались такие разделы, как теория доказательств, теория моделей, конструктивная логика, теория сложности вычислений, модальная логика, нестандартный анализ, математическая лингвистика и др. Материалы ряда спецкурсов вошли в учебники и монографии: [Успенский 1960], [Кушнер 1973], [Адян 1975], [Драгалин 1979], [Успенский 1982],

---

[4] Лишь некоторая часть спецкурсов А.Г. Драгалина отражена в его книге [Драгалин, 1979]. Дальнейшим изданиям лекций помешали последующий переезд его в Венгрию (1983 г.) и преждевременная кончина (1998 г.).

[Семенов, Успенский 1987], [Успенский 1987], [Марков 1994], [Марков, Нагорный 1996], [Верещагин, Шень, 1999].

Кафедра математической логики приняла самое активное участие в создании в 1960 г. отделения теоретической и прикладной лингвистики на филологическом факультете МГУ. Кафедрой разрабатываются учебные планы этого отделения в части математики и постоянно ведется преподавание ряда математических дисциплин. (Методические разработки по некоторым курсам имеются в [Пентус 1999]).

IV. Научная работа

Научная работа на кафедре ведется постоянно, и научные достижения кафедры хорошо известны во всем мире. Крупные научные результаты были получены не только ее преподавателями, но также аспирантами (В.Г. Кановей, М.Д. Кроль, В.Е. Плиско) и студентами (Л.Д. Беклемишев, А.П. Копылов, Ан.А. Мучник, М.Р. Пентус, А.А. Разборов, В.Ю. Шавруков). Они были отмечены премиями, вошли в известные монографии и учебники.

С 1965 года на кафедре постоянно работает семинар по алгоритмическим вопросы алгебры и логики под руководством профессора С.И. Адяна, который стимулировал многие результаты в данной области.

С 1980 г. на кафедре действует научно-исследовательский Колмогоровский семинар по теории сложности, который объединяет сотрудников и выпускников кафедры и является своеобразным неформальным творческим коллективом. В настоящий момент (2002 г.) семинаром руководят Н.К. Верещагин, А.Л. Семенов, А.Х. Шень. На протяжении ряда лет в его работе активно участвовали В.Г. Вовк, В.В. Вьюгин, К.Ю. Горбунов, Ан.А. Мучник; полученные ими результаты также отражены в настоящем обзоре.

За время существования кафедры возникли четыре новых поколения специалистов по математической логике и теории алгоритмов :

1-е поколение

- *Ученики А.Н. Колмогорова* : Е.А. Асарин, Л.А. Левин, Ю.Т. Медведев, В.А. Успенский;
- *ученики А.А. Маркова* : А.Г. Драгалин, Б.А. Кушнер, Н.В. Петри, Н.М. Нагорный, А.А. Тверской , Фан Динь Зиеу;
- *ученики П.С. Новикова* : С.И. Адян, А.В. Кузнецов, А.А. Мучник;
- *ученик Д.А. Бочвара:* В.Н. Гришин.

2-е поколение

- *Ученики С.И. Адяна:* И.Г. Лысенок, Г.У. Оганесян, Ю.И. Ожигов, В.А. Осипова, А.А. Разборов, Н.Н. Репин, А.Г. Савушкина, О.А. Саркисян;
- *ученики А.Г. Драгалина :* Е.С. Божич, В.А. Вершинин, Ф.Р. Кашапова, В.Н. Кривцов, М.Д. Кроль, А.М. Левин, Т.В. Турашвили, В.Х. Хаханян, Г.Ф. Шварц, А.М. Якубович, А.Д. Яшин;
- *ученики В.А. Успенского*: В.Л. Будинас, В.А. Варданян, Н.К. Верещагин, В.В. Вьюгин, Я.М. Другуш, В.А. Душский, В.Г. Кановей, В.Н. Крупский, А.А. Кузичев, М.В. Ломковская, В.А.

Любецкий, О.В. Митина, Е.Ю. Ногина, Нгуен Хыу Нгы, В.Е. Плиско, Д.П. Скворцов, С.Ф. Сопрунов, Э.Д. Стоцкий, М.А. Ушаков, А.А. Шум, А.Х. Шень;

- *ученик А.А. Мучника*: М.А. Ройтберг;
- *ученик Н.М. Нагорного*: М.М. Кипнис;
- *ученик С.И. Адяна и А.Г. Драгалина*: С.К. Соболев;
- *ученики А.А. Маркова и А.Г. Драгалина*: С.Н. Артёмов, Н.Н. Непейвода, В.Б. Шехтман;
- *ученик А.А. Маркова и А.А. Мучника*: А.Л. Семенов;
- *ученики В.А. Успенского и А.Г. Драгалина*: Г.К. Гаргов, В.Х. Сотиров.

3-е поколение

- *Ученики С.Н. Артемова*: Г.К. Джапаридзе, Е.Е. Золин, К.Н. Игнатьев, А.П. Копылов, П.Г. Наумов, М.Р. Пентус, В.Ю. Шавруков, Т.Л. Яворская (Сидон), Р.Э. Яворский;
- *ученики Н.К. Верещагина*: А.Е. Ромащенко, А.В. Чернов, М.В. Вьюгин, А.Ю. Митягин;
- *ученики В.Е. Плиско*: Д.А. Витер, М.В. Патласов;
- *ученик А.А. Разборова*: М.В. Алехнович;
- *ученики А.Л. Семенова*: Ан.А. Мучник, А.В. Фекличев;
- *ученики В.Б. Шехтмана*: А.Г. Кравцов, А.В. Кудинов, А.В. Романов, И.Б. Шапировский;
- *ученики С.И. Адяна и С.Н. Артемова*: Л.Д. Беклемишев, С.Н. Горячев;
- *ученик С.И. Адяна и А.А. Разборова*: О.В. Вербицкий;
- *ученики Н.К. Верещагина и А.Х. Шеня*: М.С. Агеев, К.С. Макарычев, Ю.С. Макарычев;
- *ученик А.Н. Колмогорова и А.Л. Семенова*: В.Г. Вовк;
- *ученик А.Л. Семенова и Н.К. Верещагина*: К. Ю. Горбунов.

4-е поколение

- *ученик Т.Л. Яворской*: Р.М. Кузнец.

1.Теория доказательств.

1.1. “ Традиционная ” теория доказательств.

Теория доказательств - раздел математической логики, созданный Д. Гильбертом в начале 20 в. в связи с проблемами обоснования математики. Основная задача теории доказательств - разработка “финитных” методов анализа формальных аксиоматических теорий. Фундаментальные открытия в этой области - теоремы о неполноте арифметических теорий - были сделаны К. Гёделем в начале 1930х гг. Первыми работами по теории доказательств в России были упомянутые выше работа А.Н. Колмогорова [К25] и работа П.С. Новикова о непротиворечивых арифметических теориях [Нов43] (см. также [Новиков 1979]).

К традиционным методам в теории доказательств можно отнести *методы нормализации* (т.е. устранение правила сечения) и *методы интерпретации* (т.е. погружение одних формальных теорий в другие). Методы второго типа близки к теоретико-модельным, но возникают также в теории доказательств. К ним относится и известный *метод реализуемости*, применяемый для анализа конструктивных теорий. Традиционные методы ведут начало от классических работ 1930-х гг. (К. Гёдель, Г. Генцен, С.К. Клини) . Эти методы развивались на кафедре, в основном, в работах А.Г. Драгалина (аспиранта, затем доцента) и его учеников.

Следует отметить, что область логических исследований А.Г.Драгалина была достаточно широка. Он являлся видным представителем конструктивистской школы А.А. Маркова, и потому многие результаты формулировались и доказывались им конструктивными (или интуиционистскими) средствами. Так, в [Др68] было намечено доказательство нормализуемости в стиле Тейта для примитивно рекурсивных лямбда-термов конечных типов. В [Др69] адаптирован метод Шютте нормализации инфинитарных выводов и на основе его доказаны аналоги результатов Фефермана - Шёнфилда о трансфинитных прогрессиях арифметических теорий для расширений интуиционистской арифметики. Еще одна важная конструкция получена в [Др80]: элементарный перевод, "обратный" к негативному переводу Колмогорова - Геделя, для доказательств чисто экзистенциальных формул[5]. Это дает элементарное доказательство допустимости правила Маркова для интуиционистских формальных систем, откуда следует, что для широкого класса интуиционистских и классических систем множество доказуемо рекурсивных функций - одно и то же.

Драгалину принадлежат также глубокие результаты о нормализации выводов в логических системах. Хорошо известна его теорема о сильной нормализации для генценовских систем первого порядка: любая последовательность шагов устранения сечения завершается, если при этом не переставляются соседние сечения [Др79с], [Драгалин 1979]. Теоремы нормализации были доказаны для различных теорий: теории определимых множеств натуральных чисел [Др77] с омега-правилом, интуиционистской теории типов с аксиомой объемности [Др79с], [Драгалин 1979], для классической логики высшего порядка [Др86а].

Сравнительно новое направление в теории доказательств - исследование “практически непротиворечивых” арифметические теорий, т.е. таких, в которых всякое доказательство противоречия слишком велико и потому недоступно человеку. Эти теории “допустимых” натуральных чисел рассматривались в [Др85], где улучшены и уточнены результаты Р. Парикха (1971). Дальнейшие результаты в этой области получил аспирант Е.С. Божич [Бо85], [Бо86], [Бо87].

Аспирант А.М. Левин провел тонкое исследование различных вариантов классического анализа (арифметики второго порядка), используя синтаксический вариант метода вынуждения Коэна – т.е., по существу, метод интерпретации. В работах [Л75], [Л75а] доказано, что аксиома выбора AC не выводится из остальных аксиом теории FMA (классического анализа без аксиомы выбора, но с аксиомой свертывания), а аксиома зависимого выбора DC строго сильнее, чем AC. В [Л77] установлено, что аксиома полного упорядочения универсума дает консервативное расширение анализа с аксиомой DC. Теория FMA изучалась также в [Л73], [Л78], [Л79]. В частности, было доказано, что при использовании аксиомы свертывания только для формул без параметров по множествам уже нельзя доказать несчетность континуума.

---

[5] Независимо такой перевод был построен Х. Фридманом (США).

Интересные результаты были получены аспирантом А.А. Тверским. Как известно, в 1970-е гг. Дж. Парисом и Л. Харрингтоном были впервые построены конкретные примеры истинных арифметических формул комбинаторного характера (вариантов теоремы Рамсея о графах), недоказуемых в арифметике Пеано. Ранее теоремы о независимости в арифметике, начиная со знаменитой теоремы Геделя, использовали диагональный метод. Тверскому удалось, усовершенствовав метод Париса - Харрингтона, построить строго возрастающую последовательность расширений арифметики новыми аксиомами комбинаторного характера [Т80].

Интуиционистские формальные теории без отрицания изучались В.Н. Кривцовым (аспирантом, затем - докторантом кафедры) [Кр84], [Кр84а], [Кр84б], [Кр84в], [Кр84г], [Кр00].

1.2. Логики доказуемости и арифметические теории.

Идея построения модальной логики доказуемости принадлежит Гёделю (1933). В стандартном случае логика доказуемости представляет собой классическую логику с дополнительной одноместной связкой $\Box$ (“доказуемо”), которая интерпретируется как гёделев оператор доказуемости в арифметике Пеано **PA**. Активные исследования в этой области начались после того, как в 1976 г. Р. Соловей построил аксиоматику логики доказуемости для **PA**. Существенный вклад внесли работы российских ученых, причем все они, за исключением работы В.А. Варданяна, были выполнены на кафедре. Отметим, что известная монография Дж. Булоса [Boolos, 1993] в основном, посвящена результатам, полученным в России к началу 1990-х гг., а ее обложка окрашена в три цвета российского флага.

Одним из ведущих специалистов по логике доказуемости стал С.Н. Артемов (в конце 1970-х гг. — аспирант, впоследствии — профессор кафедры). Первый его результат - равномерный вариант теоремы Соловея об арифметической полноте - доказан в 1979 г. (см. [Ар80, [Ар90]). Затем в 1985 г. С.Н. Артемов получил отрицательное решение *проблемы аксиоматизации предикатной логики доказуемости*, установив, что эта логика составляет Π_1^1-полное множество [Ар85]. Этот результат независимо доказан В.А. Варданяном, также выпускником кафедры [Вар85]. Однако, несмотря на этот отрицательный результат, удалось найти разрешимые теории первого порядка с оператором доказуемости. В частности, в работе С.Н. Артемова и Ф. Монтанья (Италия) [Ар+92] доказано, что во многих важных случаях (например, для арифметики сложения Пресбургера и арифметики умножения Сколема) соответствующие теории разрешимы. В работе С.Н. Артемова и Г.К. Джапаридзе (стажера кафедры) [Ар+90] была доказана разрешимость фрагмента предикатной логики доказуемости, состоящего из формул с одной фиксированной переменной.

Джапаридзе построил также логику доказуемости для арифметики с омега-правилом [Дж86], а затем нашел аксиоматику логики доказуемости с дополнительными модальностями, соответствующими доказуемости формул различной арифметической сложности [Дж90].

Глубокое исследование логик доказуемости было проведено Л.Д. Беклемишевым (аспирантом, затем сотрудником лаборатории логических проблем информатики). В 1989 г. им доказана *классификационная теорема для пропозициональных логик доказуемости* [Б89а]; за эту работу в 1994 году ему была присуждена премия Московского математического общества для молодых ученых. На основе логик доказуемости им исследованы (1991-1994) трансфинитные прогрессии аксиоматических теорий, основанные на итерации утверждений о непротиворечивости и схемы локальной рефлексии (по Тьюрингу - Феферману) [Б91], [Б92], [Б92а]. Эти результаты завершили большую серию работ в теории доказательств, начатую еще Гёделем в 1930-е гг.

Во второй половине 1990-х гг. Беклемишев применил логики доказуемости к исследованию фрагментов **PA**, с ограничениями кванторной сложности формул в схемах индукции и подстановки. Им получены точные характеризации таких фрагментов в терминах схем рефлексии Клини. Доказан неожиданный результат: для фрагмента **PA**, задаваемого схемой индукции для Π_2-формул без параметров, класс доказуемо рекурсивных функций совпадает с примитивно рекурсивными функциями. Установлена независимость ряда принципов в ограниченной арифметике [Б95], [Б95а], [Б97], [Б97а], [Б97б], [Б98], [Б99], [Б99а], [Б00].

Беклемишев исследовал также полимодальные логики доказуемости и разработал подход к анализу формальных теорий на основе таких логик. Этот подход был применен к арифметике Пеано первого и второго порядка [Б96].

Значительные результаты в логике доказуемости были получены студентом В.Ю. Шавруковым. Им была решена известная *проблема аксиоматизации модальной логики интерпретируемости* [Ша88] (независимое решение было получено А. Берардуччи [B90]). Далее Шавруков исследовал для теорий, содержащих арифметику Пеано, т. наз. алгебры Магари, т.е. алгебры Линденбаума, дополненные оператором доказуемости. Как известно, обычные алгебры Линденбаума для всех теорий, удовлетворяющих условиям второй теоремы Гёделя о неполноте, изоморфны. Однако Шавруков установил, что алгебры Магари неизоморфны уже для арифметики Пеано (**PA**) и теории множеств Цермело - Френкеля (**ZF**). Интенсивные исследования алгебр Магари позволили Шаврукову решить в 1994 г. одну из центральных проблем в данной области: он доказал *неразрешимость логики доказуемости с пропозициональными кванторами* [Ша94].

Студент К.Н. Игнатьев [Иг92] распространил результат С.Н. Артемова о равномерной арифметической полноте **GL** на другие логики доказуемости. Он также исследовал свойство ε_1-интерполируемости в арифметике. Модальная логика этого двуместного предиката оказалась аналогичной логике интерпретируемости Шаврукова - Берардуччи [Иг93а]. Затем Игнатьев описал модальные логики предикатов сильной доказуемости и перенес на этот случай результаты Джапаридзе о полимодальных логиках доказуемости [Иг93б].

В работах аспиранта С.В. Горячева [Гор86], [Гор89] с помощью логик доказуемости исследовался локальный принцип рефлексии в арифметике Пеано.

Доцент Е.Ю. Ногина исследовала свойства арифметически полных расширений логики **GL** [Но86], [Но90]. Интерполяционное свойство Крейга в различных логиках доказуемости изучала Т.Л. Яворская (Сидон) (аспирантка, позднее доцент кафедры) [Яв94], [Яв98].

Принципиально новый подход к логическому анализу доказуемости был развит профессором С.Н. Артемовым и его учениками в 1990-е гг. В 1993-97 гг. им построена *пропозициональная логика доказательств* **LP**, содержащая формулы вида “ t есть доказательство A ”, а также явные операции над доказательствами. Был найден полный базис для пропозиционально выразимых операций над доказательствами и установлена разрешимость **LP**. Логика доказательств позволила построить новую *конструктивную интерпретацию интуиционистской логики и модальной логики* ***S4*** [Ар+93а], [Ар+93б][6]. Артемовым также построено рефлексивное лямбда-исчисление, представляющее собой теоретико-типовую версию логики доказательств. Для этого исчисления была доказана теорема о сильной нормализуемости, обобщающая изоморфизм Карри-Ховарда между типовыми лямбда-термами и формальными доказательствами в интуиционистской логике [Ар99], [Ар99б], [Ар01].

Исследования логик доказательств ведутся также доцентом В.Н. Крупским. В [Ар+96], [Кру97] изучены ссылочные структуры данных как модели динамической логики доказательств; установлены арифметическая полнота и разрешимость функционального (детерминированного) варианта логики доказательств, в котором имеются естественные операции над доказательствами. Для этой цели разработана теория *унификации обобщенных термов*. Для конечных систем уравнений с обобщенными термами доказана разрешимость свойства унифицируемости: установлено существование наиболее общего унификатора и найден эффективный алгоритм его применения к обобщенному терму .

Т.Л. Яворская построила аксиоматизацию для логики **MLP** - обогащения логики доказательств гёделевским оператором доказуемости (**GL**-модальность ☐). Для конечных расширений базисного фрагмента системы **MLP** доказана разрешимость и арифметическая полнота [Яв97].

С.Н. Артемов и Т.Л. Яворская исследовали алгоритмическую трудность естественных предикатных расширений логики доказательств. Для различных логик этого вида получены нижние оценки сложности и доказана неаксиоматизируемость [Яв98а], [Ар+01].

Были также найдены пропозициональные логики доказательств, соответствующие ряду известных модальных логик (аспиранты Е.Л. Казаков, Д.А. Шапиро, В. Брежнев). Для логики доказательств **LP**(**S5**), соответствующей модальной логике **S5**, Казаков и Шапиро доказали теорему об арифметической полноте и разрешимость. Аспирант Р. М. Кузнец [Куз00] получил верхнюю оценку сложности разрешения Π_2^P для логики доказательств Артемова **LP**, показывающую, что **LP** существенно проще своего модального варианта **S4**.

1.3.Прикладная теория доказательств.

В последней четверти 20-го века во всем мире интенсивно развивались прикладные разделы теории доказательств. Методы теории доказательств сегодня используются в задачах верификации программ и в базах знаний, в языках программирования (как, например, PROLOG) и т.д.

На кафедре приложения логик доказательств, ориентированные на автоматизацию построения математических доказательств, развивались сотрудниками лаборатории логических проблем информатики. Доцент В.Н. Крупский построил алгоритм распознавания **PA**-

[6] Такая интерпретация была предсказана Гёделем еще в 1933 году, но до появления работ Артемова никогда не была формализована.

допустимости арифметических правил вывода, заданных схемами в языке функциональной логики доказательств; предложен эффективный метод устранения допустимых правил такого рода из арифметических выводов. Им также разработан и программно реализован эффективный алгоритм унификации для задачи унификации термов со связыванием переменных.

В совместной работе с Корнелльским университетом (США) средствами программных комплексов Nuprl, MetaPRL построена эффективная формализация ряда конструктивных теорий. Предложена новая, ориентированная на извлечение полиномиальных программ из доказательств, формулировка теории конечных автоматов (студент А.Ю. Ногин). Построена модификация теории предиката Хоара, предназначенная для верификации программ на усеченном варианте языка Pascal. Эта теория обогащена средствами извлечения верхних оценок на время работы программы из доказательства того, что программа заканчивает работу (студент А.П. Копылов). Построен эффективный теоретико-типовой формализм для арифметики целых чисел (аспирант Е.Н. Брюхов). Аспирантом Е. М. Макаровым [Мак98] описан метод построения канонических моделей для программ, состоящих из наследственных харроповых формул. Доказана теорема о корректности и полноте для данных моделей.

2. Аксиоматическая теория множеств.

Как уже отмечалось, аксиоматическая теория множеств начала развиваться на механико-математическом факультете в послевоенные годы под влиянием идей Н.Н. Лузина и П.С. Новикова. Современный этап развития начался с середины 1960х гг., когда в этой области возникли новые мощные методы, прежде всего метод форсинга и булевозначные модели (П. Коэн, Р. Соловей, Д. Скотт и др.). Молодые ученые кафедры математической логики активно включились в эти исследования.

2.1. Классические теории множеств.

Аксиома конструктивности V=L, использованная Гёделем для доказательства непротиворечивости континуум-гипотезы и аксиомы выбора, оказалась чрезвычайно плодотворной и в дескриптивной теории множеств. Подробное изучение проективной иерархии в конструктивном универсуме L было начато П.С. Новиковым [Нов51], который построил примеры неизмеримого по Лебегу A_2-множества и несчетного Π_1^1-множества без совершенного ядра. В 1960-е гг., с появлением новых методов, было предпринято исследование тех средств, которые по существу используются для построения контрпримеров Новикова. Аспирант В.А. Любецкий [Лю68] доказал, что существование несчетного Π_1^1-множества без совершенного ядра эквивалентно утверждению, которое гораздо слабее аксиомы конструктивности: несчетности множества действительных чисел, конструктивных относительно некоторого множества натуральных чисел.[7]

Аспирант В.Г. Кановей дал исчерпывающий анализ взаимоотношений различных форм аксиомы выбора в зависимости от дескриптивной сложности этих форм. Он также предложил метод построения теорий множеств, содержащих множества с определенными свойствами на

[7] Этот результат независимо получили также Р. Соловей и Р. Менсфилд (США).

заданном уровне сложности множеств [Ка76]. В своих работах Кановей модифицировал метод Р. Йенсена для построения моделей, содержащих контрпримеры к различным утверждениям на данном уровне проективной иерархии, но не содержащих контрпримеров того же вида на меньших уровнях [Ка80], [Ка82а]. Теория определимых множеств в системе Цермело-Френкеля развивалась аспирантами А.Г. Драгалиным и В.А. Любецким [Др+69], [Др+71] .

Методы Кановея были применены аспирантом Б.Л. Будинасом в дальнейших исследованиях степеней конструктивности [Бу79], [Бу81], [Бу80], [Бу80а]. Им, в частности, доказана совместность с **ZFC** утверждения о существовании ровно трех степеней конструктивности действительных чисел, которые линейно упорядочены и каждая из которых содержит $\Delta^1{}_3$-число. Им также установлена совместность принципа селекции с некоторыми утверждениями дескриптивной теории множеств [Бу81а], [Бу82], [Бу83].

Позднее В.Г. Кановей провел исследование еще одной группы известных проблем дескриптивной теории множеств — проблем Лузина о конституантах. Напомним формулировки этих проблем.

Проблема I. Узнать, существует ли открытое решето C, такое что каждая конституанта E_α состоит ровно из одной точки.

Проблема Ia. Узнать, существует ли открытое решето C, такое что каждая конституанта E_α состоит не более, чем из одной точки, а число непустых E_α несчетно.

Проблема II. Узнать, существует ли открытое решето C, такое что каждая конституанта E_α состоит не более, чем из счетного множества точек, а число непустых E_α несчетно.

Проблема III. Узнать, существует ли простое решето C, такое что конституанты E_α образуют ограниченное по рангу семейство борелевских множеств, среди которых имеется несчетное число непустых.

Основная проблема теории аналитических совокупностей. Узнать, существует ли открытое решето C, такое что среди конституант E_α, E_α ± несчетное число непустых и все эти конституанты образуют ограниченное по рангу семейство.

Главные результаты В.Г. Кановея [Ка85], [У+83] состоят в следующем:

- проблема III эквивалентна проблемам Ia и II и потому неразрешима;
- проблема I и основная проблема теории аналитических совокупностей решаются отрицательно: решет, о которых здесь говорится, не существует (даже при замене требований открытости и простоты более слабым требованием борелевости!)

Последние результаты в известном смысле уникальны: до тех пор никому не удавалось обнаружить разрешимую проблему среди серьезных проблем дескриптивной теории, обсуждавшихся, но оставленных открытыми в трудах классиков — Н.Н. Лузина и П.С. Новикова.Уникальность подчеркивается тем, что Кановей использовал метод форсинга и теорию конструктивных множеств – средства, применяемые обычно в доказательствах независимости различных гипотез в теории множеств. Здесь можно провести параллель с использованием аналитических методов в теории чисел, где формулировка проблем относится к натуральным числам, а методы их решения используют комплексные числа, теорию меры и т.д.

Интересный вариант предикативной теории множеств изучался аспирантом Н.Н. Непейводой [Неп73], [Неп73а], [Неп73б], [Неп74]. Им построена соответствующая формальная система с конструктивным омега-правилом и доказана ее полнота. Установлена связь построенной теории с разветвленным анализом уровня $\omega+1$.

Аспирант А.М. Якубович, используя метод форсинга, доказал, что добавление аксиомы выбора не нарушает непротиворечивости простой теории типов [Як81], а также исследовал соотношение различных вариантов аксиомы выбора в теории типов [Як81а].

Аспирант В.Н. Гришин провел исследование наиболее загадочной аксиоматической теории множеств - **NF** У. Куайна. Как известно, аксиоматика **NF** чрезвычайно проста: она задается аксиомой объемности и схемой стратифицируемых аксиом свертывания. Тем не менее, вопрос о непротиворечивости **NF** является, по-видимому, одной из труднейших нерешенных проблем математической логики. Гришину удалось доказать средствами теории множеств Цермело - Френкеля, непротиворечивость фрагмента $\mathbf{NF}_3$ теории Куайна, в котором все аксиомы свертывания стратифицируются с помощью индексов 1,2,3 [Гр69]. С другой стороны, аналогичный фрагмент $\mathbf{NF}_4$ (и даже его конечно аксиоматизируемая часть) оказывается уже эквивалентным всей **NF** [Гр72], [Гр76]. Гришиным также изучен вариант системы Куайна, в котором аксиома объемности применяется только к непустым множествам [Гр73].

Теория **NF** изучалась также А.М. Левиным, который доказал непротиворечивость **NF** в ее расширении двумя частными случаями схемы индукции [Л73].

2.2. *Интуиционистские теории множеств.*

Теории множеств на основе интуиционистской логики исследовались А.Г. Драгалиным и его учениками. Как уже отмечалось, в [Др79с] доказана теорема нормализации для интуиционистской теории типов. Аспирант Г.Ф. Шварц исследовал интуиционистскую теорию типов **HATT** методом реализуемости, см. [Шв79], [Шв80], [Шв83]. Им доказано, что непротиворечивость теории **HATT** не нарушается при добавлении к ней новых аксиом: тезиса Черча, принципа униформизации и принципа Маркова. Для этих теорий им также установлено экзистенциальное свойство и свойство явной определимости.

Другие варианты интуиционистской теории типов изучались аспиранткой Ф.Р. Кашаповой, также с применением метода реализуемости. В [Каш84а] доказано, что конструктивная теория типов совместима с тезисом Черча. В [Каш89] построена интуиционистская теория типов, в которую погружается фрагмент классической теории типов, где аксиома свертывания каждого уровня не содержит параметров высших уровней.

Аспирант В.Х. Хаханян исследовал интуиционистские варианты теории множеств Цермело - Френкеля. Им усилен результат Х. Фридмана (1973) о непротиворечивости интуиционистской теории множеств Майхила с добавленными тезисом Черча и принципом Маркова относительно классической теории Цермело - Френкеля. Модифицировав реализуемость Фридмана, Хаханян доказал, что к рассматриваемой теории можно без противоречия добавить аксиому объемности и аксиому двойного дополнения [Х83].

2.3. Нестандартные модели и теория множеств.

Важным инструментом математической логики и ее приложений являются нестандартные модели, с которыми связаны, в частности, доказательства независимости предложений различных формальных теорий. Исследованием нестандартных моделей арифметики в 1970-е гг. занимались аспиранты С.Ф. Сопрунов и А.А. Тверской.

С.Ф. Сопрунов изучал строение решеток, составленных из моделей арифметики. В частности, он доказал, что любая конечная дистрибутивная решетка может быть реализована как решетка моделей, заключенных между двумя данными. Сопрунов отыскал также ряд условий, при которых одна модель арифметики вкладывается в другую [С75], [С75а], [С76], [С79].

А.А. Тверской, существенно усилив известные теоремы Фефермана и Тенненбаума, доказал, что никакую нестандартную модель арифметики нельзя занумеровать так, чтобы хотя бы одна из операций сложения или умножения оказалась рекурсивной (вычислимой) в этой нумерации. Однако, заменив в сигнатуре арифметики сложение и умножение парой одноместных функций (через которые выражаются сложение и умножение), можно обеспечить существование модели и двух нумераций, первая из которых делает рекурсивной первую функцию, а вторая — вторую [Т82], [Т84], [Т85], [Т87].

Теория суммирования рядов с позиций нестандартного анализа А. Робинсона развивалась В.Г. Кановеем [Ка88], [Ка+95]; см. также приложение Кановея к книге [Успенский, 1987].

В 1990-е гг. В.Г. Кановей исследовал аксиоматическую теорию множеств в области оснований “нестандартной математики” - обобщения нестандартного анализа [К95], [К+95], [К+95а], [К+97], [К+97а]. Для формализации нестандартной математики Нельсоном (1977) была построена аксиоматическая теория внутренних множеств **IST**, содержащая два базисных предиката: принадлежности (∈) и стандартности (st). Нельсон доказал консервативность **IST** относительно **ZFC**, но, как установил Кановей, **IST** и **ZFC** различаются не слишком сильно: каждое множество, определимое формулой в языке **IST** с использованием только стандартных параметров, является стандартным. С другой стороны, Кановей построил предложение F в **IST**, не эквивалентное никакому ∈-предложению. Он ввел также теорию ограниченных множеств **BST**, близкую к **IST**, в которой нет парадоксальных предложений типа F. Поэтому **BST** допускает “глобальную” параметризацию всех внешних множеств (вопрос о справедливости аналогичного свойства для **IST** остается открытым). Более того, внешние множества могут быть “вписаны” в универсум **BST**.

3. Теория алгоритмов.

3.1. Общее понятие алгоритма.

Как уже отмечалось, значительный вклад в развитие теории алгоритмов в нашей стране внесли А.А. Марков, А.Н. Колмогоров, П.С. Новиков, работавшие фактически независимо друг от друга.

Центральную роль в теории алгоритмов играет само понятие алгоритма, которое нуждается в формальном уточнении. Поэтому не случайно, что разнообразные варианты формального определения алгоритма появлялись, начиная с классических работ 1930-х гг. (Гёдель, Чёрч, Тьюринг и др.), вплоть до недавнего времени.

Нормальные алгорифмы Маркова возникли как уточнение понятия алгоритма, найденное им для простого изложения решения проблемы Туэ (см. выше). Хотя это определение задает тот же класс вычислимых функций, что и другие классические определения, оно обладает рядом технических и методических преимуществ, см. [Марков, Нагорный 1996] и стало рабочим в научной школе Маркова.

С другой стороны, А.Н. Колмогоров в начале 1952 г. сформулировал свое знаменитое общее определение алгоритма в виде преобразования размеченных комплексов. Основные характеристики алгоритма описаны им следующим образом [К53].

“Мы отправляемся от следующих наглядных представлений об алгоритмах:

1) Алгоритм Г, примененный ко всякому “условию” (“начальному состоянию”) A из некоторого множества D(Г) (“области применимости” алгоритма Г), дает “решение” (“заключительное состояние”) B.

2) Алгоритмический процесс расчленяется на отдельные шаги заранее ограниченной сложности; каждый шаг состоит в “непосредственной переработке” возникшего к этому шагу состояния S в состояние $S^* = \Omega_Г(S)$.

3) Процесс переработки $A^0 = A$ в $A^1 = \Omega_Г(A^0)$, A^1 в $A^2 = \Omega_Г(A^1)$, A^2 в $A^3 = \Omega_Г(A^2)$ и т. д. продолжается до тех пор, пока либо не произойдет безрезультатная остановка (если оператор $\Omega_Г$ не определен для получившегося состояния), либо не появится сигнал о получении “решения”. При этом не исключается возможность неограниченного продолжения процесса (если никогда не появится сигнал о решении).

4) Непосредственная переработка S в $S^* = \Omega_Г(S)$ производится лишь на основании информации о виде заранее ограниченной “активной части” состояния S и затрагивает лишь эту активную часть.”

Это определение Колмогоров предложил для разработки своему ученику (тогда студенту 5-го курса) В.А. Успенскому в дипломной работе. Впоследствии данное определение явилось предметом их совместной статьи [К+58], где было доказано, что оно приводит к тому же классу вычислимых функций, что и другие известные определения, т.е. к рекурсивным функциям. Однако цель Колмогорова состояла не в формулировке еще одного эквивалентного определения вычислимой функции, а в таком математическом уточнении понятии алгоритма, которое отражает реальный процесс вычисления. Как отмечается в [G88], “тезис Колмогорова и Успенского как будто состоит в том, что каждое вычисление, выполняющее только одно ограниченное локальное действие в единицу времени, не только моделируется, но и действительно является вычислением на подходящей КУ-машине. В некотором смысле это сильнее, чем тезис Тьюринга.”

Позднее было доказано, что вычислительная модель Колмогорова - Успенского (КУ) действительно сильнее, чем модель Тьюринга: для КУ-машин класс функций, вычислимых в реальное время шире, чем для машин Тьюринга [Гри76]. Еще один интересный пример в этой области построил Л.А. Левин (ученик А.Н. Колмогорова): для всякой вычислимой функции на двоичных словах существует оптимальный по времени обращающий ее (т.е. находящий какой-нибудь прообраз, когда он существует) алгоритм Колмогорова - Успенского [Лев73], [G88]. Идея

Колмогорова о моделировании процесса вычислений была в дальнейшем развита Ю.Ш. Гуревичем (США) в его понятии машины с абстрактными состояниями (ASM) - формализации понятия вычислительной системы. В этих машинах каждое состояние есть структура первого порядка (в КУ-машине - размеченный граф); на каждом шаге вычисления происходит ее локальное преобразование. Машины Гуревича оказались эффективным инструментом в задачах верификации программ и в настоящее время используются в системных разработках компании Microsoft [G01].

3.2. Теория рекурсии.

Исследования общих свойств алгоритмов и вычислимых функций начались в МГУ еще в 1950-е гг. Первые результаты и публикации в этой области принадлежат А.В. Кузнецову [Ку50]. Теория вычислимых функций была темой исследований Ю.Т. Медведева и В.А. Успенского - аспирантов А.Н. Колмогорова[8]. Ими, в частности, независимо друг от друга была получена характеризация гипериммунных множеств в терминах быстрого роста их прямого пересчета (т.е. монотонного перечисления) [У57а].

Ю.Т. Медведев исследовал степени трудности массовых проблем и понятие алгоритмической сводимости. Тема диссертации В.А. Успенского — вычислимые операции над перечислимыми множествами [У55] . Развивая общие понятия нумерации и сводимости нумераций, предложенные Колмогоровым, В.А. Успенский ввел понятия вычислимой и главной нумерации. Интуитивное понятие программы вычислимой фукнциии получило тем самым уточнение (одновременно строгое и общее) в виде понятия номера функции относительно какой-либо главной нумерации. Это позволило доказать ставший классическим результат о невозможности алгоритмического распознавания свойств вычислимых функций по их программам[9] и о совпадении вычислимых операций с операциями, задаваемыми вычислимыми преобразованиями программ [У55а]. Успенским была также установлена связь теории алгоритмов с теоремой Гёделя о неполноте [У53].

Аспирант Нгуен Хыу Нгы исследовал последовательности внутренних состояний, которые может принимать та или иная машина Тьюринга.

Исследования по теории нумераций были продолжены аспирантами В.А. Успенского В.А. Душским и В.В. Вьюгиным.

В.В. Вьюгин изучал строение полурешеток вычислимых нумераций классов перечислимых множеств. Он доказал, что существует полурешетка вычислимых нумераций без минимальных элементов и что существует не эффективно-дискретный класс, имеющий одноэлементную полурешетку вычислимых нумераций. Им также получена характеризация сегментов для полурешетки перечислимых T-степеней для полурешетки вычислимых нумераций класса всех перечислимых множеств [Вью72], [Вью73], [Вью73а], [Вью74], [Вью74а].

---

[8] Диссертации Успенского и Медведева были защищены в один и тот же день (в 1955 г.).

[9] Близкий результат - о невозможности распознавания свойств перечислимых множеств по их номерам - независимо и несколько раньше был получен Райсом (H.G. Rice, США) – см. [Успенский 1960, §11, теорема 11]. Теорема Райса является следствием теоремы Успенского (см. [Успенский 1960, §11, теорема 9]). Иногда в литературе теорема Успенского по ошибке также приписывается Райсу.

На основе теории нумераций В.А. Душский перенес на классы множеств способы сравнения алгоритмической сложности, которые были известны для множеств: арифметическую и аналитическую иерархии, степени неразрешимости, рекурсивную эквивалентность [Душ74].

В работе В.А. Успенского [У74] была предложена естественная система аксиом, из которых вытекают многие основные теоремы общей теории алгоритмов. Как показал позднее его аспирант А.Х. Шень [Ш80], класс функций удовлетворяет этой системе аксиом тогда и только тогда, когда он состоит из всех функций, вычислимых относительно некоторого оракула. Шеню принадлежит также аксиоматизация приоритетной конструкции [Ш79].

В это же время Шень исследовал проблемы (в смысле Медведева) отделимости перечислимых множеств. В частности, он построил две такие проблемы отделимости, что никакие их решения не сравнимы в смысле тьюринговой сводимости [Ш79]

Ан. А. Мучником доказано с применением сложностного подхода существование эффективно простого в сильном смысле множества [Муч+99].

3.3. Построение и анализ алгоритмов.

Специалисты по теории алгоритмов, начиная от ее основателей, всегда занимались ее прикладными аспектами, в частности построением и анализом конкретных алгоритмов. В 1960-е гг. прикладными вопросами теории алгоритмов занимался А.А. Марков. В это время у него созрел замысел формального языка, пригодного для описания работы вычислительных машин. Описание реальной вычислительной машины, выполненное на таком языке, по замыслу Маркова, должно иметь точную синтаксическую структуру и тем самым допускать исследование математическими средствами. Такой язык был опубликован в [Мар+67]; позднее на его основе Н.М. Нагорный разработал язык для описания работы систем взаимодействующих машин [Н74].

Исследованием схем программ занимался доцент А.Л. Семенов и его ученики. А.Л. Семенов доказал разрешимость проблемы эквивалентности для регулярных выражений над алгоритмическими алгебрами В.М. Глушкова. Студент А.В. Фекличев получил элементарную по Кальмару верхнюю, а аспирант М.А. Ройтберг — нижнюю оценку для сложности разрешения этой проблемы. Ройтберг изучал также другой класс схем программ — схемы Янова с магазином; Фекличев установил алгоритмическую разрешимость проблемы эквивалентности для линейных рекурсивных схем с ограниченной задержкой [Ф84], [Ро77], [Ро77а].

Н. К. Верещагин (2000) построил быстрый алгоритм поиска вторичной структуры в данной последовательности нуклеотидов.

Аспирантом А. Евфимьевским изобретен способ передачи файла получателю, имеющему близкий файл, при котором количество переданных битов есть полином от логарифма длины файлов и количества различий в файлах [Е00].

Верхние и нижние оценки, обобщающие результат Я.М. Барздиня о сложности распознавания симметрии на многомерный случай, получены аспирантом М.А. Ройтбергом [Ро78].

Студент А.Ю. Митягин (2000) построил быстрый алгоритм поиска локального максимума для функции, заданной на плоской целочисленной решетке.

4. Проблема разрешения в классической логике.

Традиционной темой в математической логике и теории алгоритмов является *классическая проблема разрешения*, поставленная Д. Гильбертом в начале 20-го века: построить алгоритм, распознающий общезначимость формул логики предикатов. После того, как в середине 1930-х гг. А. Чёрч и А. Тьюринг доказали неразрешимость этой проблемы для класса всех формул первого порядка, развернулось обширное исследование ее частных случаев, в том числе разрешимых и неразрешимых аксиоматических теорий. Многие из полученных результатов нашли приложения в информатике. В 1960-е гг. в работах Дж. Бюхи и М. Рабина были получены глубокие результаты о разрешимых теориях второго порядка, обнаружена их связь с теорией конечных автоматов.

На кафедре исследование проблемы разрешения велось в нескольких направлениях.

Интересные результаты были получены доцентом А.Л. Семеновым. Для изложения результатов введем обозначения: если J — структура, то TJ обозначает ее элементарную теорию (1-го порядка), MJ — монадическую (т.е. теорию 2-го порядка с одноместными предикатными переменными). Семенов указал общие условия, обеспечивающие разрешимость теорий вида T(**N**, +,P), T(**N**, ≤, f), M(**N**, ≤, P), где P - одноместный предикат, f — одноместная функция [Сем79], [Сем83], [Сем84], [Сем86]. В частности, была доказана разрешимость теорий T(**N**, +, x!) и T(**N**, +, Ф(x)), где Ф(x) есть x-е число Фибоначчи. Он также построил пример такого P, что теория T(N,+,P) неразрешима, но все выразимые в ней отношения разрешимы, и другие подобные примеры. Результаты Семенова обобщили ряд теорем, полученных ранее Бюхи, Зифкесом, Рабином и др. Они позволили ответить на вопрос о разрешимости элементарной и монадической теорий для всех “EIC-фрагментов арифметики”, т.е. структур вида (**N**,σ), где все элементы σ получаются из сложения и умножения в результате применения некоторого числа операций навешивания квантора существования, отождествления переменных и подстановки констант.

В то же время Семенов доказал, что всякий предикат на натуральный числах, регулярный (т.е. распознаваемый конечными автоматами) в двух разных системах счисления, выразим через сложение [Сем82], [Сем86]. Он также построил регулярный в двоичной системе счисления предикат, невыразимый в теории T(**N**, +, ∃y (x=2y))[10].

Студент Ан.А. Мучник нашел принципиально новое доказательство знаменитой теоремы Рабина (1969 г.) о разрешимости монадической теории бинарного дерева с двумя функциями следования (**S2S**). Эта теорема имеет многочисленые применения в логике и теоретической информатике, поскольку в **S2S** погружаются разннобразные логические теории, как классические, так и неклассические. Работа Рабина содержала довольно сложное рассуждение с использованием трансфинитной индукции по счётным ординалам, доказывающее лемму об автоматности дополнения всякого автоматного множества размеченных деревьев. Ан. А.

---
10 Эта гипотеза высказана Мак-Нотоном в 1963 г.

Мучнику удалось доказать эту лемму с помощью оригинального теоретико-игрового метода без привлечения трансфинитной индукции [Муч85], [Муч92].

В работе Н.К. Верещагина [Вер90] получен новый алгоритм разрешения элементарной теории линейно упорядоченных множеств. В отличие от двух ранее известных алгоритмов, он прямой и имеет оптимальную верхнюю оценку времени работы.

Аспирантом Р.Э. Яворским найдены в явном виде логики первого порядка, соответствующие наиболее известным логико-математическим теориям: арифметически корректным теориям [Я98], теории равенства, теории колец, полей, групп [Я98а]. В частности установлено, что логические схемы первого порядка, общезначимые в теории групп, совпадают с исчислением предикатов [Я99]; этот известный вопрос не поддавался решению в течении ряда лет.

В работах В.Б. Шехтмана совместно с Д. Габбаем (Англия) с помощью методов модальной логики были построены новые разрешимые фрагменты классической логики первого порядка с двуместными предикатами и релятивизованными кванторами. Для них была также доказана финитная аппроксимируемость и установлена связь с теорией реляционных алгебр Тарского [Ше+00].

5. Конструктивные логики и теории.

5.1. Конструктивная школа А.А. Маркова.

Как уже отмечалось, конструктивное направление в математике, развивавшееся А.А. Марковым и его школой, - альтернативный вариант интуиционистской концепции Брауэра - Вейля, основанный на точном математическом определении алгоритма. Программа Маркова предлагала все математические понятия определять в терминах *конструктивных процессов* и *конструктивных объектов*, а в математических доказательствах использовать особую *конструктивную логику*. Минимальным вариантом конструктивной логики является интуиционистская логика, описанная аксиоматически А.Н. Колмогоровым (1925) и А. Гейтингом (1930). Однако интуиционистское исчисление оказывается не вполне точной формализацией конструктивной логики Маркова (даже на пропозициональном уровне), поскольку оно неполно относительно семантики реализуемости (см. ниже). Поэтому Марков пришел к особому построению конструктивной логики, получившему название ступенчатой семантической системы Маркова. В этой системе смысл суждений следующей ступени определяется в терминах объектов предыдущей ступени [Мар74], [Мар74а], [Мар74б], [Мар74в], [Мар74г], [Мар74д], [Мар74е], [Мар76], [Мар77]. При этом выполняется принцип конструктивного подбора (*принцип Маркова*) — один из самых важных и интересных принципов конструктивного анализа, предложенный Марковым в 1952 г. Он объявляет конструктивно приемлемой импликацию $\neg\neg\exists x\ P(x) \to \exists x\ P(x)$ для любого алгоритмически разрешимого предиката P.

Ступенчатая семантическая система, затрагивающая тонкие и сложные проблемы оснований математики, глубоко занимала Маркова до последних дней его жизни. Исследование принципов конструктивной логики Маркова было продолжено его учениками: А.Г. Драгалиным, П. Петковым (Болгария) и др. [Др74], [Др74а], [Др74б], [Драгалин 1979].

Учениками Маркова был получен ряд интересных результатов в области конструктивного анализа. Так, аспирант Б.А. Кушнер установил неразрешимость ряда алгоритмических проблем, в теории конструктивного интегрирования и исследовал различные варианты определения конструктивного действительного числа [Кушнер 1973], [Куш64], [Куш65], [Куш65а], [Куш67], [Куш67а], [Куш67б]. Аспирант Фан Динь Зиеу развивал конструктивную теорию локально выпуклых пространств [Фан Динь Зиеу 1970].

5.2. Частично-конструктивное направление

Результаты конструктивной математики могут быть осмыслены не только на конструктивной, но также и на классической основе. Такой подход приводит к так называемому частично-конструктивному направлению. Пример подобного изложения конструктивной логики — упоминавшийся выше курс П.С. Новикова, составивший книгу [Новиков 1977].

На кафедре в частично-конструктивном духе исследовались конструктивная логика (см. раздел 5.3) и конструктивный анализ[11].

В.А. Успенский [У60], [Успенский 1960] доказал, что система конструктивных (иначе – вычислимых) действительных чисел не сводится к системе вычислимых n-ичных дробей ни для какого n>1.

В.Н Крупский (аспирант, позднее - доцент кафедры) развивал теорию совместных диофантовых аппроксимаций конструктивных действительных чисел. В основу было положено понятие эффективной аппроксимируемости действительного вектора в данной шкале; при этом под шкалой понимается вычислимая монотонно сходящаяся к нулю последовательность рациональных чисел $\{\varepsilon_k\}$, используемых в качестве погрешностей приближений. Вектор называется аппроксимируемым в данной шкале, если существует алгоритм, который для бесконечно многих членов шкалы позволяет построить его рациональное приближение с точностью ε_k . Крупский доказал, что множество аппроксимируемых векторов зависит лишь от порядка малости шкалы; зависимость найдена явно. Это позволило построить нетривиальную иерархию, классифицирующую действительные векторы по степени трудности задачи аппроксимации, и изучить ее свойства. Были найдены примеры шкал для которых существует n-мерный не аппроксимируемый вектор, все (n-1)-мерные проекции которого оказываются аппроксимируемыми [Кру79], [Кру81], [Кру82], [Кру84].

Эффективные метрические пространства изучались Е.Ю. Ногиной (аспирантка, позже - доцент кафедры) и В.Н. Крупским. Е.Ю. Ногина ввела и исследовала понятие эффективно топологического пространства [Но66], [Но69], [Но78]. Ею был доказан алгоритмический аналог большой метризационной теоремы Урысона. В [Но+74] изучены категории нумерованных топологических пространств с разного типа вычислимо непрерывными отображениями в качестве морфизмов, а в [Но81] - взаимосвязь между сепарабельностью и прослеживаемостью множеств относительно нумерованной совокупности. Крупский и Ногина исследовали

[11] В [Успенский, Семенов 1987] частично-конструктивное направление в анализе названо “вычислимый анализ” - в отличие от “конструктивного анализа” школы Маркова.

топологию вполне перечислимых множеств [Кру79], [Но78а]. Крупским были также описаны классы динамических систем, допускающих конструктивные аналоги [Кру84].

5.2 . Семантика "задач" А.Н. Колмогорова и ее развитие.

Первой работой, где было намечено построение семантики интуиционистской логики, была работа А.Н. Колмогорова [К32], где интуиционистская логика интерпретировалась как логика задач. Понятие "задачи" в этой работе было еще интуитивным; позже было предложено несколько различных его уточнений.

Первое из них — семантика Клини—Роуза, где "задача" представляет собой арифметическую формулу; "решениями", или "реализациями", служат натуральные числа[12]. При этом все теоремы интуиционистского исчисления предикатов оказываются реализуемыми (Нельсон, 1947); с другой стороны (Роуз, 1953), известны примеры реализуемых, но интуиционистски не доказуемых пропозициональных формул.

На кафедре понятие реализуемости исследовалось как с конструктивных, так и с классических позиций. Доцент Н.М. Нагорный нашел интересный вариант клиниевского определения реализуемости, совпадающий с клиниевским при конструктивном прочтении и резко отклоняющийся от него при классическом прочтении [Н64]. В 1950-е гг. А.А. Марков установил важное свойство реализуемых пропозициональных формулах, имеющих. вид дизъюнкции: если формула вида $A \vee B$ реализуема (в смысле Клини—Роуза), то существует алгоритм, выявляющий ту из формул A и B, которая при этом реализуема. Однако доказательство этого факта было им утрачено. Аспирант Н.М. Нагорного М.М. Кипнис доказал, что если формула $A \vee B$ реализуема то формулы A и B не могут быть обе нереализуемыми; но более сильное утверждение Маркова все еще остается недоказанной гипотезой.

Детальное исследование различных понятий реализуемости провел В.Е. Плиско (аспирант, впоследствии — доцент кафедры). Используя теорему Тенненбаума о нестандартных моделях арифметики, доказанную незадолго до того, Плиско установил замечательный результат: *неарифметичность* (и следовательно, неаксиоматизируемость) *множества всех реализуемых предикатных формул* ("предикатной логики реализуемости") [Пл73]. Затем Плиско установил различие предикатных логик для трех видов реализуемости: обычной реализуемости (формула реализуема, если существует алгоритм нахождения реализации любого ее замкнутого арифметического примера), неопровержимости (не существует опровержения, т.е. нереализуемого арифметического примера) и равномерной реализуемости (существует постоянная реализация). Для всех этих логик также была доказана неарифметичность [Пл78].

Отметим, что для пропозициональных формул аналогичные вопросы все еще остаются открытыми. Некоторые результаты на эту тему получены в [Пл92]: построен пример нереализуемой пропозициональной формулы, которая равномерно реализуема относительно класса замкнутых арифметических формул с не более чем одной реализацией.

---

[12] Клини ввел понятие реализуемости для арифметических формул в 1935 г., не зная, по-видимому, о работе Колмогорова.

Позднее В. Е. Плиско ввел и исследовал понятие Σ_n-реализуемости для языка формальной арифметики, являющееся обобщением рекурсивной реализуемости Клини в результате замены рекурсивных функций на Σ_n-функции. Оказалось, что каждая предикатная логика Σ_n-реализуемости рекурсивно изоморфна логике обыкновенной реализуемости [Пл90], [Пл92]. Плиско (1995) рассматривал также различные конструктивные семантики языка формальной арифметики, основанные на геделевской интерпретации, когда в качестве модели языка арифметики конечных типов берется система наследственно рекурсивных операций, и получил точные оценки арифметической сложности предикатных логик, соответствующих таким семантикам; все они – неперечислимы, а во многих случаях - неарифметичны [Пл95], [Пл97], [Пл97а], [Пл99].

Другое уточнение понятия задачи было предложено учеником А.Н. Колмогорова Ю.Т. Медведевым. Согласно этой интерпретации, “задача” есть пара конечных множеств (X,Y), где $Y \subseteq X$ (X понимается как множество “потенциальных решений”, Y – как множество “реальных решений”). Пропозициональным связкам соответствуют естественные операции над задачами. Пропозициональная формула называется финитно общезначимой (по Медведеву), если при всех подстановках задач вместо пропозициональных переменных результирующая задача имеет хотя бы одно реальное решение. Для формул без отрицания реализуемость, финитная общезначимость и интуиционистская выводимость эквивалентны. Более тонкое исследование формул с подобными свойствами провел аспирант Д.П. Скворцов [Ск76], [Ск79а], [Ск80]. Однако в общем случае существуют финитно общезначимые нереализуемые формулы (Медведев) и реализуемые формулы, которые не финитно общезначимы [Пл73].

Вопросы об аксиоматизации логики финитных задач **LM** и об ее разрешимости до сих пор остаются открытыми. Ю.Т. Медведев (1966) доказал коперечислимость этой логики. Однако аспиранты Д.П. Скворцов и В.Б. Шехтман совместно с Л.Л. Максимовой (Новосибирск) установили, что **LM** не является конечно аксиоматизируемой [Ск+79]. С другой стороны, Скворцов ввел в рассмотрение трансфинитный и рекурсивный аналог понятия финитной задачи и доказал, что “логика бесконечных задач” $\mathbf{LM_1}$ рекурсивно (но не конечно) аксиоматизируема; вопросы о разрешимости $\mathbf{LM}_1$ и о ее совпадении с **LM** - открыты [Ск79]. Скворцов изучал также предикатные аналоги логики задач и доказал их неаксиоматизируемость по аналогии с результатами Плиско о предикатной логике реализуемости [Ск79в].

Еще один вид конструктивной семантики представляет собой семантика “типов информации” Медведева. Логики типов информации близки к логике бесконечных задач, и для них были получены аналогичные результаты [Ше+86].

Как уже отмечалось в 1.2, адекватную формализацию семантики “задач” Колмогорова дает также логика доказательств С.Н. Артемова **LP**. Операции реализуемости при этом получают точную интерпретацию как соответствующие операции над доказательствами. Модальная логика **S4** и интуиционистская логика оказываются полными относительно такой доказательственной реализуемости [Ар01].

Совсем недавно произошло неожиданное соединение двух идей Колмогорова: семантики задач и колмогоровской сложности. Профессор Н.К. Верещагин и аспирант А.В. Чернов получили следующий результат [Вер+02]. Рассмотрим реализации прозициональных формул конечными множествами натуральных чисел, так что логические связки интерпретируются в соответствии с семантикой, предложенной Колмогоровым. Тогда оказывается, что класс пропозициональных формул A(P,Q,...), имеющих реализацию сложности o(n), где n — наибольшая из сложностей множеств, подставляемых вместо переменных P,Q,..., совпадает с логикой слабого закона исключенного третьего (логикой Янкова).

Этот результат верен для любого из следующих 4 способов измерения сложности множества:

1) наименьшая из сложностей элементов множества,
2) наибольшая из сложностей элементов множества,
3) наибольшая из длин элементов множества (элементы множества — двоичные слова).
4) двоичный логарифм количества элементов множества.

Та же логика получается если считать формулу A(P,Q,...) реализуемой, если для некоторой арифметической функции натурального аргумента f для любых арифметических формул F(x), G(x) с одним параметром x, для почти всех n формула A(F(n),G(n),...) имеет реализации < f(n).

Ан. А. Мучником доказано, что та же логика получится, если требовать чтобы сложность реализации была не более cn (где c - произвольная константа <1). При этом сложность множества понимается в первом смысле.

5.3. Неклассические модели и их применение

Интуиционистская теория моделей развивалась в работах доцента А.Г. Драгалина и его учеников. В [Др73а] впервые введены модели Крипке с равенством и доказаны соответствующие теоремы полноты. В дальнейшем модели Драгалина (и эквивалентные им “пучки Крипке”) стали активно использоваться в интуиционистской теории моделей, в том числе, и для логик без равенства, см. [Ше+90]. В [Др74а] были введены новые типы моделей: булевы алгебры с пополнением и их частный случай - ВК-структуры, которые, в свою очередь, одновременно обобщают модели Крипке и модели Бета. На этой основе Драгалиным были построены модели для ряда систем интуиционистского анализа: теории беззаконных последовательностей Крайзеля и теории свободно становящихся последовательностей в стиле Клини - Весли. Развитый алгебраический аппарат был также использован им для доказательства теоремы нормализации в непредикативной теории типов. В [Др79а], [Др79б] Драгалин ввел функциональные алгебраические модели (“равномерные алгебры”), обобщающие, с одной стороны, - цилиндрические алгебры Хенкина - Тарского, а с другой - алгебраические модели интуиционистской логики предикатов по Расевой - Сикорскому. Основная особенность этих структур - использование формальных преобразований (трансформаций) абстрактных кортежей из индивидов. В этом контексте описываются такие виды реализуемости, как штрих Клини и штрих Ацела. Один из вариантов этого подхода - меташкалы Крипке, введенные Д.П. Скворцовым в начале 1990-х гг. [Ск+93], ставшие полезным инструментом в неклассической теории моделей. В [Др80] были введены новые виды реализуемости, которые применены к исследованию правила Маркова в интуиционистской арифметике.

Топлогические модели для исследования различных теорий интуиционистского анализа использовал аспирант М.Д. Кроль [Кро76], [Кро77], [Кро78], [Кро78а]. В частности, он решил известную проблему, установив непротиворечивость, а также свойства дизъюнктивности и экзистенциальности для интуиционистского анализа Майхилла - теории, формализующей основные принципы интуиционизма Брауэра.

Аспирант Г. Гаргов (Болгария), усовершенствовав известную конструкцию Сморинского, доказал свойства дизъюнктивности и экзистенциальности для интуиционистского анализа EL [G76]. В работе [G75] им исследовались пропозициональные формулы, допустимые в интуиционистском анализе Клини - Весли FIM : формула называется допустимой, если добавление ее в качестве схемы аксиом не противоречит данной теории. Гаргов построил конкретные допустимые интуиционистски недоказуемые формулы и показал, что не существует максимальной логики высказываний, состоящей из допустимых формул.

6. Теория неклассических логик.

6.1. Суперинтуиционистские и модальные логики.

Среди множества видов неклассических логик, исследовавшихся в конце 20 в., наибольшее число работ было посвящено модальным и суперинтуиционистским логикам. Модальные логики отличаются от классической использованием дополнительных логических связок. Простой синтаксис, разнообразие семантик и алгоритмическая разрешимость многих модальных логик открыли широкие возможности для приложений в области информатики.

Суперинтуиционистские логики, т.е. расширения интуиционистской логики, тесно связаны с модальными логиками. На кафедре в этой области в начале 60-х годов работал старший научный сотрудник А.В.Кузнецов. Начав систематическое исследование трех основных проблем для суперинтуиционистских логик: функциональной полноты, финитной аппроксимируемости и разрешимости, - он показал неразрешимость массовых проблем полноты, разрешимости эквивалентности для широкого класса исчислений высказываний [Ку63] и нашел функционально полные связки в интуиционистской логике [Ку65][13].

На кафедре модальные логики начали активно развиваться с середины 1970-х гг. по нескольким направлениям, включая логики доказуемости (см. раздел 1.2). Семантические и алгоритмические проблемы в модальных и суперинтуиционистских логиках исследовал В.Б. Шехтман. В [Ше78а] им построен пример неразрешимого суперинтуиционистского исчисления высказываний, что составило решение известной 39-й проблемы Фридмана. Проблема разрешения исследовалана также в [Ше82], где строятся примеры неразрешимых модальных и временных исчислений, основанные на примерах полугрупп с неразрешимой проблемой слов.

В это же время было получено решение некоторых проблем, поставленных Х. Оно и А.В.

[13] После защиты кандидатской диссертации А.В. Кузнецов переехал (в 1965 г.) в Кишинев, где им и его учениками были продолжены исследования суперинтуиционистских логик и получен ряд важных результатов.

Кузнецовым: впервые построено суперинтуиционистское исчисление высказываний, неполное в реляционной семантике Крипке [Ше77], доказана неэквивалентность топологической семантики и реляционной семантики Крипке для суперинтуиционистских логик [Ше80], установлено нарушение свойства Лёвенгейма - Сколема для суперинтуиционистских логики [Ше83]. В [Ше78] было описано строение алгебр Линденбаума с конечным числом переменных для известных модальных логик **S4** и **Grz** (проблема Ригера, 1957).

Дальнейшее изучение топологических моделей модальных логик проводилось Шехтманом в 1990-е гг. Доказано, что для всех модальных логик, содержащих **K4**, и для всех суперинтуиционистских логик из полноты по Крипке следует сильная полнота в топологической семантике [Ше98], [Ше99а]; в языке с операторами локальной и универсальной истинности построена аксиоматика логики связного плотного в себе сепарабельного метрического пространства [Ше99]. В [Ше90] построена аксиоматика эквациональной теории булевой алгебры подмножеств $\mathbf{R}^n$ с операцией производного множества (решение проблемы МакКинси-Тарского, 1944). В [Ше93] найдена аксиоматика временной логики рациональной прямой с оператором локальной истинности (продолженное время), что дает ответ на вопрос Д. Скотта (1968). Для всех новых модальных логик из этих работ была установлена финитная аппроксимируемость. Студент А. В. Кудинов (2001) построил аксиоматику пространств $\mathbf{R}^n$ в модальном языке с оператором локальной истинности и оператором неравенства.

Новую область исследований составляет многомерные модальные логики. К ним, в частности, относятся произведения модальных логик, введенные в [Ше78б]. Общие свойства произведений исследованы в [Ше+98], [Ше+00]. Аспирант А. Г. Кравцов установил разрешимость, конечную аксиоматизируемость и финитную аппроксимируемость всех расширений многомерной модальной логики $\mathbf{SL}^n$ (где **SL** - логика модальности “завтра”) [Кра02], [Кра02а]. Другой вид многомерных модальных логик - логики пространства-времени Минковского изучался в [Ше83а], [Ше+02].

Исследование семантик суперинтуиционистских и модальных предикатных логик было начато аспирантами Д.П. Скворцовым и В.Б. Шехтманом в 1980 г. и продолжается до сих пор. Был получен ряд теорем о неполноте для различных вариантов реляционной и топологической семантики [Ше+90]. С другой стороны, для новой семантики “меташкал Крипке”, введенной Скворцовым, удалось доказать достаточно общие результаты о полноте [Ск+93].

Проблема разрешения для фрагментов суперинтуиционистских и модальных предикатных логик исследовалась в [Ше+93] и [Ше+98]. Были доказаны результаты о разрешимости таких логик с одной предметной переменной и неразрешимости логик с двумя переменными.

А.Д. Яшин (аспирант, позднее докторант кафедры) исследовал различные расширения интуиционистской логики высказываний дополнительными связками. В [Яш82] рассматривалась связка “завтра” в интиуиционистской логике. Затем была получена полная семантическая характеризация интуиционистских и модальных связок [Яш84б], [Яш84], [Яш84б], [Яш86], [Яш89]. Следующий цикл работ Яшина посвящен проблеме П.С. Новикова (начало 1960-х гг.) - построить максимальное консервативное расширение интуиционистской логики новыми связками. Им были построены конкретные примеры таких логик [Яш94], [Яш96], [Яш96а], [Яш96б], [Яш98], [Яш98а], [Яш99] и доказано что их множество континуально [Яш97в]. В [Яш99б] Яшин построил классификацию всех полных расширений интуиционистской логики новыми пропозициональными константами.

Аспирант Д.А. Витер [Ви01] изучал конструктивные теории равенства. Он доказал, что в случае счетного носителя существует бесконечно много таких теорий, зависящих от свойств нумерации рассматриваемого множества.

Доцент В.Е.Плиско [Пл99] получил точные оценки арифметической сложности предикатных логик полных конструктивных арифметических теорий, обладающих свойством экзистенциальности.

Для обобщения негативного перевода А. Н. Колмогорова В. А. Успенским было введено понятие диагностической пропозициональной формулы [У+94]. В.Е. Плиско и аспирант М. В. Патласов исследовали это понятие. Были найдены все исчисления, имеющие диагностические формулы относительно минимального исчисления высказываний [Пл93], [Па00].

Аспирант Е.Е. Золин исследовал отношение интерпретируемости между модальными логиками [З00], [З01].

Студент П.Г. Наумов изучал модальные логики предикатов, в которые погружается интуиционистское исчисление предикатов [На91].

Аспирант В.А. Варданян построил модальную логику знаний и действий, в которой можно формализовать решение известной логической задачи о мудрецах [Вар79], [Вар81].

6.2. Линейная логика.

Линейная логика **LL** была введена Ж. Жираром в 1987 г. как исчисление высказываний, учитывающее ресурсы, которые используются в доказательствах. В основе его лежит аналогия между доказательствами и программами. Линейная логика привлекла с начала 1990-х годов внимание многих специалистов по теоретической информатике. На кафедре был получен ряд результатов об алгоритмической сложности ее фрагментов [Ко97], [Пе93].

Логика **LL** в полном объеме неразрешима. Однако в 1994 г. студент А.П. Копылов получил неожиданный результат о разрешимости линейной логики с правилом ослабления и неразрешимости той же логики для случая языка второго порядка [Ко00], [Ко01]. За эту работу в 1995 году ему была присуждена премия Клини за лучшую студенческую работу от международной конференции LICS (Logic in Computer Science).

7. Теория сложности.

7.1. Сложность алгоритмов.

Основы теории сложности были заложены в 1960-е гг. независимо по нескольким направлениям. В школе А.А. Маркова развивалась теория сложности алгоритмов. Первые работы по этой теме были опубликованы А.А. Марковым [Мар64], [Мар67]. Сложность алгоритма в этих работах понимается как занимаемый его программой объем памяти. Это понятие сложности было

использовано Марковым в новом методе доказательств неразрешимости: исследуемая алгоритмическая проблема аппроксимируется расширяющейся последовательностью алгоритмических проблем, таких, что алгоритма, решающего каждую из них, не может не существовать (при этом может быть неизвестно, как такой алгоритм найти). Если при этом окажется, что с ростом *n* нижняя оценка сложности алгорифмов, решающих n-ю частичную проблему, растет неограниченно, то, анализируемая проблема будет неразрешимой.
Новый подход Маркова развивался в работах его учеников [Пет69], [Пет69а], [Пет69б], [Пет69в], [Пет+69а].

Алгоритм (понимаемый как предписание) представляет собою конструктивный объект; и концепция Маркова сложности алгоримов вкладывается в более общую концепцию сложности произвольного конструктивного объекта. В 1965 г. А.Н. Колмогоров [K65] предложил трактовать сложность объекта как объем (размер) его описания, так что сложность зависит от принятого способа описания. Задача о сложности описания булевых функций, решавшаяся в работах А.А. Маркова и Н.В. Петри, была по существу задачей о сложности некоторых объектов при условии, что описание происходит посредством схем нормальных алгорифмов. Колмогоров также установил, что из различных способов описания существует оптимальный, т.е. дающий самые короткие, с точностью до прибавления ограниченной функции, описания. Сложность относительно такого способа описания (энтропия) была использована Колмогоровым и его учениками в обосновании теории вероятностей и теории информации (см. далее, разд. 8).

7.2. P=?NP и булева сложность.

К началу 1970-х гг. возникает современная концепция полиномиальной сводимости алгоритмических проблем и полиномиальных классов сложности. Эта концепция была разработана С. Куком, Р. Карпом и независимо от них учеником А.Н. Колмогорова Л.А. Левиным [Лев73]. В частности, Левиным был введен важнейший класс сложности NP (проблем, разрешимых на недетерминированных машинах Тьюринга за полиномиальной время) и понятие NP-полной проблемы. Была доказана теорема об NP-полноте шести известных комбинаторных проблем, среди них проблемы выполнимости для формул классической логики высказываний (теорема Левина - Кука), введена полиномиальная “сводимость по Левину”, доказана теорема о существовании оптимального алгоритма для любой проблемы класса NP.

Начиная с этого времени, проблема о совпадении классов сложности P и NP, поставленная Куком (1972), становится центральной в данной области. Более того, в известном докладе С. Смейла [S98] она была названа одной из трех наиболее значительных математических проблем наступившего 21-го века (вместе с гипотезами Римана и Пуанкаре), а в 2000 г. включена в список Millenium Prize Problems (7 выдающихся проблем математики, за которые назначена высокая премия).

Дальнейшие исследования в этой области связаны, в частности, с теорий булевой сложности. Главной целью этой теории (не достигнутой в полном объеме до сих пор) является установление нижних оценок сложности вычисления конкретных булевых функций с помощью схем из данного класса. В конце 1950-х - начале 1960-х гг. этой темой занимался А.А. Марков; краткий обзор его работ см. в [Р01а]. В [Мар62а] рассмотрена одна из самых популярных в то время вычислительных моделей, контактно-вентильные схемы, и для случая монотонных схем такого вида (называемых в [1] положительными двухполюсниками) совершенно точно вычислена сложность реализации всех пороговых (= монотонных симметрических) функций. В частности, для наиболее важной функции голосования MAJ_n эта сложность оказалась порядка n. Работы [Мар57], [Мар63а] посвящены инверсионной сложности, [Мар58б] - задаче вычисления суммы mod n для чисел в унарной кодировке.

Утверждение P≠NP вытекает из следующей (недоказанной) гипотезы.

Для произвольного $n \geq 2$ рассмотрим булеву схему D_n из элементов И, ИЛИ и НЕ, входом которой служат пары (i,j), где $1 \leq i < j \leq n$. Тогда каждому входному набору нулей и единиц соответствует граф с вершинами 1,…,n, а наличие или отсутствие ребра (i,j) определяется значением на соответствующем входе. Предположим, что на выходе схемы появляется 1 в том и только том случае, когда соответствующий граф имеет клику (=полный подграф) размера более $\sqrt{n}$. Гипотеза: число вершин в D_n растет с увеличением n быстрее любого полинома от n (вероятно, экспоненциально).

Принципиальное продвижение в получении нижних оценок в теории булевой сложности было сделано А.А. Разборовым в начале 1980-х гг., причем основные методы были по существу разработаны им во время обучения на старших курсах. Эти методы позволяют получать сильные нижние оценки для некоторых специальных типов вычислительных моделей.

В [Р85] установлен следующий фундаментальный факт.

Теорема. Существование в графе клики заданного размера не может быть проверено монотонными схемами с полиномиальным числом вершин.

Этот результат (и метод его доказательства) послужили толчком к появлению дальнейших работ в этом направлении. А.Е. Андреев [Ан85] использовал сходные методы для получения экспоненциальной нижней оценки для другой, менее естественной NP-полной задачи. В [Al+87] комбинаторная техника Разборова усовершенствована и доказаны экспоненциальные (а не только сверхполиномиальные) нижние оценки для монотонной булевой сложности задачи о клике.

Далее Разборов [Р85а] получил экспоненциальные нижние оценки в случае немонотонных схем малой глубины. В той же работе доказано, что задача о паросочетании имеет сверхполиномиальные нижние оценки для монотонных схем. С другой стороны, эта задача разрешима в полиномиальное время, если не требовать монотонности.

В дальнейшем в [Т88] с помощью методов Разборова был построен пример монотонной булевой функции, которая допускает (немонотонные) схемы полиномиального размера, но требует монотонных схем экспоненциального размера.

Очень важен изобретенный Разборовым “метод аппроксимации”. Суть его состоит в следующем. Пусть нам нужно получить экспоненциальную нижнюю оценку для числа вершин в булевой схеме, вычисляющей некоторую булеву функцию *f*. Рассматривается некоторый класс булевых функций, называемых “простыми”, и определяется понятие “расстояния” между булевыми функциями, причем оказывается, что расстояние от f до любой “простой” функции экспоненциально велико. Кроме того, выбираются функциональные элементы, которые “приближают” исходные: замена в какой-либо схеме исходного элемента на его приближение меняет результирующую функцию не более чем на 1 (в смысле введенного расстояния). Если после замены всех функциональных элементов на их “приближения”, результирующая схема вычисляет “простую” функцию, то эта функция далека от исходной функции f - и, следовательно, число вершин, в которых выполнены замены, экспоненциально велико. Значит, экспоненциально велико и общее число вершин.

В доказательстве нижней оценки для схем малой глубины роль “простых” функций исполняют полиномы небольшой степени над полем из двух элементов. Расстояние между функциями зависит от числа точек, в которых они отличаются. Изящное рассуждение показывает, что функция “большинство” далека от любого полинома малой степени. Нужные аппроксимации строятся с помощью красивой вероятностной конструкции.

Методы, примененные Разборовым для нижней оценки сложности монотонных схем в задаче о клике, существенно труднее и используют сложную комбинаторику из теории гиперграфов.

“Работы Разборова были встречены с большим интересом и разбирались на семинарах по всему миру. Появление этих результатов показало, что в области, где какой-либо прогресс представлялся едва ли возможным (но в то же время являющейся центральной в теоретической информатике), все же удалось разработать новые глубокие методы и получить сильные нижние оценки сложности вычислений” [L90].

Выдающиеся результаты Разборова были удостоены на Международном математическом конгрессе 1990 г. премии им. Неванлинны.

В недавнее время в совместных работах А.А. Разборова и студента М. В. Алехновича [Ал +00], [Ал+00а], [Ал+01] начато изучение сложности пропозициональных доказательств с точки зрения требуемой ими памяти, и для этой модели получен ряд нижних оценок сложности.

Н.К. Верещагиным и А.А. Разборовым [Вер+99] был найден способ построения дерева решения высоты $2M\log_2 N$ для вычисления булевой функции, которая представима дизъюнкцией не более, чем M элементарных конъюнкций, каждая из которых содержит N литералов, и одновременно представима конъюнкцией не более, чем M элементарных дизъюнкций, каждая из которых содержит N литералов. При N, заметно меньших 2M, этот алгоритм дает менее высокое дерево, чем известные алгоритмы.

7.2. Релятивизованная теория сложности.

Как известно, в общей теории рекурсии естественные теоремы релятивизуются, т.е. сохраняются при добавлении ко всем машинам некоторого (фиксированного) оракула. Однако в теории сложности вычислений это уже не так: оказалось, что утверждения P=NP и P≠NP не релятивизуемы (Бейкер, Гилл и Соловей, 1975). Поэтому возникает вопрос о справедливости, для различных пар классов сложности K_1, K_2 включений $K_1^A \subseteq K_2^A$ для всех оракулов A — в особенности в тех случаях, когда $K_1 \subseteq K_2$ неизвестно. Эти исследования проводились рядом авторов.

Напомним определения некоторых классов сложности, упоминаемых ниже. Язык L принадлежит классу PP, если существует полиномиальная по времени вероятностная машина M, такая что слово x принадлежит L, если и только если вероятность того, что M выдаст 1 на входе x, больше 1/2. RP есть класс языков, распознаваемых полиномиальными по времени вероятностными машинами с вероятностью ошибки, отделенной от 1/2. BPP есть класс языков, распознаваемых полиномиальными по времени вероятностными машинами с односторонней ошибкой (т.е. на слове из языка вероятность ошибки равна 0, а на слове не из языка — отделена от 1). AM (соответственно, MA) обозначает класс языков, задаваемых двухраундовыми играми Артура и Мерлина с первым ходом Артура (соответственно, Мерлина).

В работах Н.К. Верещагина [Вер92], [Вер+92], [Вер93], [Вер93а], [Вер95], [Вер95а] для большого семейства популярных в литературе классов были найдены все релятивизуемые включения. В частности, им доказано, что относительно некоторого оракула не выполняется $AM \subseteq PP$. Там же установлено, какие из классов этого семейства имеют полные проблемы относительно любого оракула. Его работы объясняют также, почему, как правило, легче выяснить справедливость $\forall A(K_1^A \subseteq K_2^A)$, чем справедливость $K_1 \subseteq K_2$. А именно, доказано, что утверждение $\forall A(K_1^A \subseteq K_2^A)$ эквивалентно утверждению (K_1LOGS $\subseteq K_2$LOGS). Здесь KLOGS обозначает класс, полученный заменой всех полиномов в определении K - полиномами от логарифма, а проблем разрешения - проблемами отделения. А вопросы о полилогарифмических классах обычно гораздо легче решаются.

Н.К. Верещагиным и Ан.А. Мучником [Муч+96] предложен некоторый обший метод построения оракулов, относительно которых справедливы те или иные соотношения между сложностными классами. В частности, ими доказано, что относительно некоторого оракула $P=RP\neq BPP$, а относительно некоторого другого оракула $P=BPP\neq RP$.

Н.К. Верещагин [Вер93б], [Вер95б] исследовал также релятивизации по модулю случайных оракулов (в смысле Мартин-Лёфа) и доказал, что в этом случае класс co-NP содержит NP-иммунные множества, а класс NP содержит co-NP-иммунные множества.

Н.К. Верещагиным и О.В. Вербицким доказано различие аналогов классов AM и MA для булевских разрешающих деревьев с неограниченным детерминизмом [Вер+99а].

8. Колмогоровская сложность и алгоритмическая теория вероятностей.

Как уже отмечалось, определение сложности конструктивного объекта было дано А.Н. Колмогоровым в 1965 г.: колмогоровская сложность двоичного слова, коротко говоря, определяется наименьшей длиной программы, порождающей это слово. В 1970-е гг. в нашей стране и за рубежом были получены основные результаты в теории колмогоровской сложности. Однако ряд трудных вопросов оставался открытым, и на кафедре продолжаются исследования в этой области. Ведущую роль здесь играет колмогоровский семинар по сложности вычислений и сложности определений под руководством А.Л. Семенова, Н.К. Верещагина и А.Х. Шеня.

Существуют несколько вариантов определения колмогоровской сложности. Так, Л.А. Левин ввел и исследовал понятие префиксной энтропии. Она определяется аналогично колмогоровской сложности, с условием, что все вычисления должны быть “самоограниченными”. Общая схема, из которой получаются различные определения сложности, основанная на f_0-пространствах Ершова, была предложена А. Шенем [Ш84].

Определение **0'**-релятивизованной сложности предполагает, что программы могут обращаться к оракулу с вопросом о том, заканчивает ли данное вычисление. Как заметил Ан.А. Мучник, оказывается, что эта сложность связана с нижними гранями частот в вычислимых последовательностях. Таким образом, получается еще одно эквивалентное определение (префиксной) сложности в релятивизованном случае [Муч87].

В 1986-2002 гг. В. А. Успенский продолжил исследование введенного А. Н. Колмогоровым понятия сложности конструктивного объекта. Предложено единое описание различных вариантов колмогоровской сложности, исследованы неравенства, связывающие между собой эти варианты [Семенов, Успенский 1987], [У92а], [У+96]. В [У01] предложено понимание колмогоровской сложности как функции, значениями которой служат элементы упорядоченного векторного пространства.

В работе Колмогорова (1965) была также введена условная сложность K(A|B) - сложность B при известном A - как минимальная длина программы, преобразующая A в B. Такое понимание тесно связано с интерпретацией Колмогорова интуиционистской логики как исчисления задач, о которой говорилось выше; K(A|B) можно понимать как сложность задачи $A \to B$.

Ряд интересных вопросов возникает в связи с верхней полурешеткой последовательностей двоичных слов с порядком

$(A_1,A_2,A_3,...) \leq (B_1,B_2,B_3,...) \Leftrightarrow$ для всех i $K(A_i,B_i) \leq K(B_i)+O(\log i)$.

Как показали А.Е. Ромащенко и Н.К. Верещагин, в этой полурешетке существуют пары элементов, не имеющие нижней грани [Ром00], [Ром00а]. С этой полурешеткой связан изучавшийся Ан. А. Мучником вопрос об извлечении общей информации из двух слов, см. [Ч +02].

Н.К. Верещагиным, А.Х. Шенем и А.Е. Ромащенко изучались линейные неравенства для колмогоровской сложности. Ромащенко доказал [Ром+00], что классы неравенств, выполненных для колмогоровских сложностей двоичных слов и для энтропий Шеннона кортежей случайных величин, совпадают. В той же работе установлено, что класс линейных неравенств, выполненных для колмогоровских сложностей, строго включен в класс неравенств, верных для рангов линейных пространств и их сумм. Получена комбинаторная интерпретация неравенств, связывающих колмогоровскую сложность групп объектов [Ром+02].

Ан.А. Мучник и С.Е. Посицельский [Муч+99] изучали инвариантные относительно колмогоровской сводимости предикаты. Ими построен одномерный инвариантный монотонный предикат. Построение выполнено в двух вариантах: логическом и алгоритмическом. Доказана эквивалентность этих двух вариантов (вложенность логического варианта в алгоритмический доказана К.Ю. Горбуновым). В той же работе построен предикат со всеми вышеописанными свойствами и дополнительным требованием, чтобы этому предикату удовлетворяло не более одного (с точностью до эквивалентности) представителя любой фиксированной сложности. Это построение проведено также в двух эквивалентных вариантах. Наконец, доказано утверждение типа “закон 0 или 1” для любого инвариантного монотонного предиката.

Аспирант М. А. Ушаков (см. [Муч+01]) изучал вопрос о колмогоровской сложности почти периодических последовательностей. Для любого $\alpha<1$ им построен пример почти периодической последовательности нулей и единиц, начальные отрезки которой длины n имеют сложность больше αn (для достаточно больших n). Отметим, что для стандартных примеров почти периодических последовательностей, колмогоровская сложность начальных отрезков растет логарифмически.

Н.К. Верещагиным, К.Ю. Горбуновым, Ан.А. Мучником и А.Х. Шенем был получен ряд результатов о колмогоровской сложности логических проблем. Проблема при этом понимается как множество двоичных слов; сложностью проблемы называется минимальная из сложностей ее элементов. В работе [Го98а] доказано, что существуют слова A,B,C такие, что сложность проблемы $(A\vee B)\longrightarrow C$ равна K(C|A)+K(C|B) с точностью до постоянного слагаемого (при этом логические связки понимаются в духе семантики “задач” Колмогорова). С другой стороны, в [Муч02] доказано, что для всех A,B,C сложность проблемы $(A\vee B)\longrightarrow C$ равна max(K(C|A),K(C|B)) с точностью до слагаемого O(log K(A,B)). В работе [Муч+01a] доказано, что сложность проблемы $(A \rightarrow C)\wedge(B \rightarrow D)$ не выражается через сложности A,B,C,D их пар, троек и четверки <A,B,C,D> и их условные сложности друг относительно друга.

Н.К. Верещагиным, Ан.А. Мучником и С.Е. Посицельским изучены взаимоотношения между различными видами предельной колмогоровской сложности (см. [Вер02]). Доказано, что с точностью до аддитивной константы следующие три вида сложности слова x совпадают:

(1) колмогоровская сложность x относительно оракула **0'**,

(2) длина минимальной программы p такой, что p(n)=x при всех достаточно больших n,

(3) верхний предел колмогоровской сложности **x** при известном n.

Н.К. Верещагиным и А.Х. Шенем [Ш+99], [Ш+01] изучены аналогичные понятия для вычислимых последовательностей ω, а именно,

(1) длина минимальной программы p такой, что для всех n слово p(n) есть начало ω длины n (обозначение: $\omega_{1:n}$),

(2) длина минимальной программы p такой, что p(n)= $\omega_{1:n}$ для всех достаточно больших n,

(3) верхний предел колмогоровской сложности $\omega_{1:n}$ при известном n,

(4) максимальное значение (по всем натуральным n) колмогоровской сложности $\omega_{1:n}$ при известном n.

Установлены точные взаимоотношениями между этими четырьмя характеристиками.

Н.К. Верещагиным и М.В. Вьюгиным [Вер+02] построены независимые минимальные программы, преобразующие два данных слова друг в друга. Минимальность здесь понимается с точностью до слагаемого порядка логарифма от сложностей слов. В той же работе ими установлено, что если требовать точности порядка логарифма от условных сложностей слов, то независимые минимальные программы существуют не для всех слов.

В последнем, скорее всего, докладе Колмогорова на семинаре по сложности было дано определение (α,β)-стохастического объекта как конечного объекта, который является типическим элементом (показателя случайности < α) простого конечного множества (сложности < β). Возникает вопрос о существовании не стохастических объектов (для малых α, β; например, порядка O(log n), где n - длина слов в данном множестве) и об их свойствах. Положительный ответ для некоторых случаев был получен Шенем [Ш83]; оценка колическтва таких объектов дана в [Вью87].

С колмогоровской сложностью связано понятие случайной последовательности по Колмогорову—Мартин-Лёфу. Частотный подход к определению случайности был предложен Мизесом в начале 20 в. На основе этого подхода были даны позже строгие определения (Чёрч, Колмогоров и др.). Однако, как заметил Шень [Ш88], все они оказываются слабее, чем определение Мартин-Лёфа (т.е. приводят к более широким классам последовательностей).

Многие теоремы классической теории вероятности имеют следующий вид: некоторое свойство двоичных последовательностей верно для почти всех последовательностей. Один из способов доказательства подобных теорем состоит в проверке нужного свойства для произвольной последовательности, случайной по Колмогорову—Мартин-Лёфу, с использованием сложностной характеризации случайных последовательностей. В.Г. Вовк нашел ряд элегантных доказательств (в частности, для закона повторного логарифма), основанных на этой идее [Во87а], [Во88].

Аспирант Е.А. Асарин исследовал стохастические свойства конечных объектов большой сложности. Он также предложил (по аналогии с определением случайной последовательности) определение случайной непрерывной функции и сложностной критерий случайности [Ас88].

Ан.А. Мучником, А.Л. Семеновым и В.А. Успенским введено новое определение случайности бесконечной последовательности в терминах ее непредсказуемости. Проанализировано соотношение этого нового понятия с ранее известными понятиями, формализующими представление о случайности индивидуального объекта, — такими как стохастичность, типичность и хаотичность [Муч+98].

Н.К. Верещагин совместно с Б. Дюраном (Франция) и др. [Вер+98] получил характеризацию конечных преобразователей, перерабатывающих случайные по Мартин-Лёфу последовательности в случайные по Мартин-Лёфу последовательности.

А.Е. Ромащенко (1999) доказал, что при любых $n>2$ нижняя грань случайной пары ортогональных k-мерных подпространств n-мерного линейного пространства над конечным полем равна 0. Ранее это было известно только для случая $n=3$, $k=1$.

Аспирант М. Агеев (2000) рассмотрел игру, предложенную Д. Мартином (она использована Р. Соловеем для доказательства некоторого утверждения о колмогоровской сложности, но имеет и самостоятельный интерес). Он показал, что область параметров, при которых первый игрок имеет выигрышную стратегию, указанная в работе Соловея, не может быть существенно расширена (при уменьшении разрешённого числа множеств появляется выигрышная стратегия второго игрока).

Приложение идей и методов теории колмогоровской сложности имеется также в математической статистике и теории обучающихся систем. Результаты в этом направлении были получены В.Г. Вовком и В.В. Вьюгиным [Вью+93], [Вью+94], [Вью+94], [Вью96а]. Был проведен алгоритмический анализ обоснованности применения байесовского метода в статистике: построен вероятностный алгоритм, который со сколь угодно близкой к 1 вероятностью выдает бесконечную последовательность, не калибруемую по Дэвиду. Такая последовательность, в частности, не случайна по Мартин-Лёфу относительно любого вычислимого распределения вероятностей. Доказан также аналог этой теоремы для прогнозирующих систем, ограниченных по времени работы. В.В. Вьюгиным решена проблема М. ван Ламбалгена (1987): доказана эргодическая теорема для случайных по Мартин-Лёфу последовательностей. Одновременно было показано также, что эргодическая теорема является в определенном смысле неконструктивной: сходимость по вероятности, а также почти всюду, является алгоритмически неэффективной.

В.Г. Вовком было введено понятие предсказательной сложности, которая является обощением колмогоровской сложности [Во85], [Во88а], [Во89]. Соотношения между колмогоровской и предсказательной сложностью, а также между предсказательной сложностью и предсказательной информацией иследовались М.В. и В.В. Вьюгиными [ВьюМ+00], [ВьюМ +01].

9. Алгоритмические вопросы алгебры.

Как известно, алгоритмические проблемы в алгебре начали исследоваться еще до возникновения теории алгоритмов. В начале 20-го века М. Ден сформулировал проблемы (тождества) слов, изоморфии и сопряженности для для групп, заданных образующими и определяющими соотношениями; А. Туэ исследовал аналогичные проблемы для полугрупп. Позднее выяснилось, что во многих случаях эти проблемы неразрешимы (о чем математики 100 лет назад не могли подозревать). Первыми отрицательными результатами в этой области явились упимнавшаяся выше теорема А.А. Маркова —Э. Поста (1947) о существовании конечно определенной полугруппы с неразрешимой проблемой слов и теорема П.С. Новикова (1950) о существовании группы с аналогичными свойствами. За ними последовали другие результаты о неразрешимости.

В 1955-57 гг. С.И.Адян установил алгоритмическую неразрешимость проблем распознавания для целого ряда инвариантных (устойчивых относительно изоморфизмов) свойств групп и полугрупп.

В книге [Марков, 1954] также была доказана теорема о неразрешимости проблем распознавания для многих свойств полугрупп. По аналогии с этим, была получена теорема Адяна - Рабина (1957-58) о неразрешимости проблем распознавания марковских свойств групп (свойство X называется марковским, если сущестует конечно определенная группа с этим свойством, а также сущестует конечно определенная группа, не вложимая ни в какую группу со свойством X).

Вслед за этим в 1958 г. А.А. Марков доказал весьма общую теорему, дающую отрицательное решение ряда знаменитых проблем топологии полиэдров и замкнутых многообразии — проблемы гомеоморфии, гомотопической эквивалентности и комбинаторной эквивалентности. За эти исследования Маркову была присуждена премия им. П.Л. Чебышева АН СССР.

В 1962-63 А.А. Марковым были доказаны принципиальные результаты, которые усиливают отрицательные решения алгоритмических проблем, полученные ранее самим Марковым и другими авторами— П.С. Новиковым, С.И. Адяном, М. Рабином. Для этой цели Марков ввел понятие вычислимого инварианта бинарного отношения. Идея Маркова состояла в том, чтобы неразрешимость какого-либо бинарного отношения доказывать путем указания двух объектов, не связанных этим отношением, но таких, что любые два вычислимых инварианта этого отношения принимают на них одно и то же значение. Эта идея была применена им к ряду важнейших алгоритмических проблем алгебры и топологии [Мар63].

Среди конкретных неразрешимых проблем, найденных А.А. Марковым, следует упомянуть также проблему вхождения для группы матриц $\mathbf{SL}_4(\mathbf{Z})$ [Мар58а]. А именно, Марков построил конечно порожденную подгруппу $\mathbf{SL}_4(\mathbf{Z})$, принадлежность к которой алгоритмически нераспознаваема.

Доцент Н.М. Нагорный дополнил результат А.А. Маркова о неразрешимости проблемы изоморфии для полугрупп, доказав, что бинарное отношение изоморфности полугрупп перечислимо [Н60]. Примененный при этом метод может быть использован и для установления перечислимости ряда других свойств и отношений конечно-определенных полугрупп и групп.

Активная работа на кафедре в области алгоритмических проблем была продолжена С.И. Адяном и его учениками. Много исследований было посвящено проблеме слов и связанной с ней проблемой делимости для полугрупп. Легко видеть, что для конечно опрделеннных полугрупп со свойством левого (правого) сокращения, заданных системой соотношений с нетривиальными правыми и левыми частями, из разрешимости проблемы левой (правой) делимости следует разрешимость проблемы слов. В этой связи полезным оказывается понятие системы соотношений без левых (правых) циклов, которое было введено в [Адян, 1966] в качестве обобщения одного несократимого слева (справа) соотношения на любое число соотношений. V [Адян, 1966] была получена следующая теорема: если полугруппа задана системой соотношений без левых или без правых циклов, то в ней выполнены законы сокращения и она вложима в группу с теми же соотношениями. На основе этого С.И. Адяном (1967) была высказана гипотеза о разрешимости проблемы левой (правой) делимости для полугруппы, заданной системой соотношений без левых (правых) циклов. Эта гипотеза все еще остается недоказанной.

Студентка В.А. Осипова доказала, что проблема слов для конечно определенных полугрупп, у которых мера налегания определяющих соотношений строго меньше, чем 1/2, разрешима; она также построила пример полугруппы с мерой налегания 1/2 и неразрешимой проблемой слов [Ос68], [Ос71].

Изучался также достаточно интересный класс полугрупп с одним определяющим соотношением. Как известно, для групп с отним соотношением проблема слов разрешима

(Магнус, 1932). Однако для полугрупп вопрос оказался гораздо труднее и в полном объеме не исследован до сих пор. Первые результаты по этой теме были получены П.С. Новиковым и С.И. Адяном [Нов+58] и затем С.И. Адяном [Адян, 1966]. В частности, была установлена разрешимость для поугрупп с одним соотношением вида A = 1.

Полугруппы с одним соотношением изучались также в работах С.И. Адяна и Г.У. Оганесяна. В [А+78] была доказана разрешимость проблемы делимости и проблемы слов дл полугруппы с соотношением вида TET=T, где T — "сверхпростое" слово, т.е. никакое собственное начало T не является его концом. В [А+87] был установлен следующий результат: полугруппа, заданная соотношением вида A=B, где B — сверхпростое слово, которое встречается в A, но не в качестве конца, имеет разрешимую проблему слов.

Дальнейшие результаты о полугруппах с одним сооношением были доказаны в [A94]: проблема слов и проблема левой делимости разрешимы для полугрупп, заданных соотношением вида aA=bB, где bB - сверхпростое, не входит в aA, и выполнено одно из двух условий:
(1) никакое начало bB не является концом aA; (2) никакое начало aA не является концом bB.

Аспирант Р. Павлов (Болгария) исследовал минимальное число образующих, при котором проблема распознавания марковских свойств неразрешима [P71].

Студент В. Борисов [Бор69] построил пример группы, имеющей 12 определяющих соотношений, с неразрешимой проблемой слов; это — минимальное число соотношений среди известных примеров такого рода.

10. Комбинаторная теория групп.

Большой цикл исследований в комбинаторной теории групп был стимулирован знаменитой *проблемой Бернсайда* (1902) :

Существуют ли бесконечные конечнопорожденные периодические группы ?

Как отмечается в книге [Чандлер, Магнус, 1985], “проблема Бернсайда явилась катализатором в исследованиях по теории групп аналогично великой теореме Ферма в теории чисел. Проблема с весьма простой формулировкой, которая оказывается крайне трудной для решения, таит в себе нечто притягательное для разума математика”.

В 1968 г. С.И.Адян и П.С.Новиков решили эту проблему, доказав бесконечность нециклических свободных периодических групп нечетного периода n>664. Это было, по-видимому, одно из наиболее сложных математических доказательств, известных в то время[14].

Для решения был создан специальный метод, основанный на классификации периодических слов по рангам [Нов+68]. Индуктивное определение ранга достаточно сложно, но позже был найден более простой его вариант, применимый для нечетных периодов n >10000 [А +92].

На основе комбинаторных методов Новикова — Адяна удалось получить ряд интересных и нетривиальных свойств групп Бернсайда B(m,n) (т.е. свободных n-периодических групп ранга

[14] В 1991 г. И.Г. Лысенок доказал бесконечность групп Бернсайда B(m,n) для всех m>1 и всех нечетных n>114, а также для случая, когда m>1, $n=2^k$, k>12.

m). В [Нов+68] было доказано, что проблема сопряженности в B(m,n) разрешима при n>4380, m>1, а в [А71] установлено, что все абелевы и все конечные подгруппы B(m,n) (при тех же условиях) - циклические. Далее С.И. Адяном был построен первый конкретный пример бесконечной системы групповых тождеств, не сводимой ни к какой конечной системе [А70] (*проблема конечного базиса для многообразий групп*), а также первый пример конечно порожденной неабелевой группы без кручения, в которой пересечение любых двух подгрупп нетривиально (в абелевом случае такие примеры хорошо известны, например, аддитивная группа **Q**).

Дальнейшее усиление результатов Новикова - Адяна получено в [А+92] , где для любого нечетного n>1001 построена бесконечная 2-порожденная группа, в которой любая собственная подгруппа - циклическая и выполнено тождество $x^n=1$ (*монстр Тарского*)[15].

С. И. Адян [А82] доказал невозвратность случайных блужданий в свободных периодических группах B(m,n) при достаточно больших нечетных n. В той же работе показано, что эти группы неаменабельны (тем самым получен отрицательный ответ на известный вопрос о том, всякая ли неаменабельная группа содержит свободную подгруппу).

Проводились также исследования по *ограниченной проблеме Бернсайда* (в другой терминологии — *проблема Бернсайда — Магнуса*) , которая состоит в следующем:
для фиксированных d и n, существуют ли наибольшая конечная группа показателя n с d образующими ?

Благодаря замеченной В. Магнусом связи между произвольными группами и алгебрами Ли, ограниченная проблема Бернсайда для простого n сводится к вопросу, является ли всякая алгебра Ли, удовлетворяющая тождеству Энгеля $\mathrm{ad}(x)^n = 0$, локально нильпотентной. Положительный ответ на последний вопрос был получен А.И. Кострикиным (1958), но первоначальное доказательство содержало пробел; полное доказательство опуликовано в книге [Кострикин, 1986]. Наконец, положительное решение проблемы для всех n было получено в известной работе Е.И. Зельманова (1991г.).

Результаты, доказанные на кафедре, дополняют общую картину. В работе С.И. Адяна и А.А. Разборова [А+87а] было впервые дано эффективное доказательство теоремы Кострикина: доказано, что порядок наибольшей конечной группы показателя p с d образующими ограничен сверху некоторой примитивно рекурсивной функцией. С другой стороны, в [А+86], [А+88], [А +89] была получена нетривиальная нижняя оценка для порядка этой группы : для достаточно больших p он оказывается больше, чем $2^{0.074p}$.

Отметим еще несколько других результатов по комбинаторной теории групп. В работе С.И. Адяна [А00] доказано, что если в группе все коммутаторы имеют конечный порядок, то ее коммутант — периодический. В работе С.И. Адяна и Е. Менникe (Германия) [А+92а] упрощено доказательство теоремы Картера - Келлера (1983) о наименьшем числе элементарных преобразований для получения данной матрицы в $\mathbf{SL}_n(\mathbf{Z})$. В работе С.И. Адяна, И.Г. Лысенка и

[15] Ранее сходные, но более слабые результаты были доказаны А.Ю. Ольшанским (1982; для всех простых $n>10^{75.3}$) и В.С. Атабекяном и С.В. Ивановым (1987; для всех нечетных $n>10^{80}$).

Е. Меннике [А+97] исследована группа $\mathbf{SL}_2(\mathbf{H})$ матриц порядка 2 над кольцом гамильтоновых кватернионов; для нее получена конечная система определяющих соотношений.

Группы кос изучались С.И. Адяном [А84], а также аспиранткой А.Г. Савушкиной. Она описала централизаторы группы кос и крашеных кос и доказала, что центр группы крашеных кос порядка $n>2$ совпадает с центром группы кос [С96а].

11. Математическая лингвистика.

Предметом математической лингвистики является анализ языков как формальных систем. В частности, в задачах синтаксического анализа язык понимается, как множество слов в некотором конечном алфавите, построенном по определенным правилам.

На кафедре математической логики проблемами математической лингвистики с 1960-х гг. занималась М.В. Ломковская. Ею был выполнен цикл исследований по изучению классов грамматик с управляемым выводом [Ло72], [Ло73].

В 1970-е гг. исследованиями в области математической лингвистики занимался аспирант А. Л. Семенов. Он изучал пропорциональные языки и получил положительный ответ на вопрос Амара и Путцолу о регулярности языка, k-линейного при двух различных k (кандидатская диссертация 1975 г.). Семенову принадлежит также неожиданное применение теоремы Тарского о разрешимости элементарной теории поля действительных чисел к алгоритмическим проблемам теории формальных языков; это применение дает возможность установить, например, алгоритмическую разрешимость проблемы эквивалентности однозначной и регулярной грамматик [Сем73], [Сем74] .

Два ключевых результата в математической лингвистике были получены М.Р. Пентусом. В 1992 г. М. Пентус (в то время студент 5-го курса) доказал знаменитую гипотезу Хомского (1962) об эквивалентности категориальных грамматик Ламбека и контекстно-свободных грамматик. Этот результат, весьма интересный и в чисто техническом отношении, имеет большое методологическое значение в данной области, поскольку он связывает современную парадигму категориальных грамматик с более традиционным типом грамматик фразовых структур [Пе93], [Пе95а].

В 1993 г. М. Пентус решил вторую основную проблему, доказав полноту исчисления Ламбека относительно языковой семантики; эта проблема стояла в течение 35 лет [Пе95], [Пе99].

За работы в математической лингвистике М. Пентус был удостоен премии FOLLI - Европейской ассоциации логики, лингвистики и информатики (1995) и премии Московского математического общества (1997).

ЛИТЕРАТУРА
Книги и брошюры

С.И. Адян. Проблема Бернсайда и тождества в группах. М., Наука, 1975.

С.И. Адян. Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и полугрупп. ТМИ, т. 85 (1966).

А.Н. Колмогоров, А.Г. Драгалин. Введение в математическую логику. М., МГУ, 1982.

А.Н. Колмогоров, А.Г. Драгалин. Математическая логика. Дополнительные главы. М., МГУ, 1984.

Н.К. Верещагин, А.Х. Шень. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1: Начала теории множеств; часть 2 : Языки и исчисления; часть 3: Вычислимые функции. М., МЦНМО, 1999.

А.Г. Драгалин. Математический интуиционизм. Введение в теорию доказательств. М., 1979; англ. перевод: A.G. Dragalin. Mathematical intuitionism. Introduction to proof theory. Translations of Mathematical Monographs, 67. American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

А.Г. Драгалин. Избранные труды, т. 1. М., Эдиториал УРС (в печати).

Е.Б. Дынкин, В.А. Успенский. Математические беседы. М.-Л., Гостехиздат, 1952, 288 с. ; нем. перевод: E. B. Dynkin, W.A. Uspenski. Mathematische Unterhaltungen. Kqln: Aulis Verlag Deubner & Co., 1979, 272 с. ; англ. перевод раздела 2: E. B. Dynkin, V. A. Uspenskii. Problems in the theory of numbers. Boston: D. C. Heath and Company, 1963, 117 pp.

В.Г. Кановей. Аксиома выбора и аксиома детерминированности. М., Наука, 1984, 65 с.

А.И. Кострикин. Вокруг Бернсайда. М., Наука, 1986.

А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов, сост. А.Н. Ширяев, ред. Ю.В. Прохоров. М. , Наука, 1987. 304 с.

А. Н. Колмогоров. Математика - наука и профессия. Библ. “Квант” т. 64. М., Наука, 1988.

Б.А. Кушнер. Лекции по конструктивному математическому анализу, М., Наука, 1973.

Н.Н. Лузин, собр.соч., т. 2. Дескриптивная теория множеств. М., Гостехиздат, 1953.

А.А. Марков. Теория алгорифмов. Труды МИАН им. Стеклова, т. 42. М.-Л., 1954.

А.А. Марков. Элементы математической логики (ред. и предисловие А.Г. Драгалина). М., МГУ, 1984.

А.А. Марков. Введение в теорию кодирования. М., Наука, 1982.

А.А. Марков, Н.М. Нагорный. Теория алгоритмов. Изд.1-е. М., Наука, 1984; изд. 2-е, дополненное. М., Фазис, 1996.

П.С. Новиков. Об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества слов в теории групп. ТМИ, т. 44, 1955, 143 с.

П.С. Новиков. Элементы математической логики, 1959 и 1973.

П.С. Новиков. Конструктивная математическая логика с точки зрения классической (с приложением В.Е. Плиско). М., Наука, 1977.

П.С. Новиков. Избранные труды. (Теория множеств и функций. Математическая логика и алгебра). М., Наука, 1979.

М.Р. Пентус. Язык математики. М., Диалог-МГУ, 1999.

М.Р. Пентус. Порождающие грамматики. М., Диалог-МГУ, 1999.

В.А. Успенский, А.Л. Семенов. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения. М., Физматгиз, 1987, 288 с.; англ. перевод: V.A. Uspensky, A.L. Semenov. Algorithms: main ideas and

applications. Kluwer Acad. Publishers, Dordrecht, 1993, 269 pp.
В.А. Успенский. Лекции о вычислимых функциях. М., Физматгиз, 1960, 492 с . ; фр. перевод : V. A. Ouspenski. Lecons sur la fonctions calculables. Paris: Hermann, 1966, 412 p.
В.А. Успенский. Некоторые приложения механики к математике. М., Физматгиз, 1958, 48 с.; англ. перевод : V. A. Uspenskii. Some applications of mechanics to mathematics. Oxford, Pergamon Press, 1961, 58 pp.
В.А. Успенский. Треугольник Паскаля, изд. 2-е, дополненное. М., Физматлит, 1979, 48 с.
В.А. Успенский. Теорема Геделя о неполноте. М., Физматлит, 1982, 111 с.
В.А.Успенский. Машина Поста, изд. 2-е, переработанное. М., Физматлит, 1988, 96 с.
В.А. Успенский. Нестандартный, или неархимедов, анализ. М., Знание, 1983, 61 с.
В.А. Успенский. Что такое нестандартный анализ? (с приложением В. Г. Кановея). М., Физматлит, 1987, 128 с.
В.А. Успенский, Н.К. Верещагин, В.Е. Плиско. Вводный курс математической
логики. Издательство МГУ. М., 1991 и 1997, 136 с. ; Физматлит, 2002, 125 с.
В.А. Успенский. Что такое аксиоматический метод? Ижевск, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001, 95 с.
Фан Динь Зиеу. Некоторые вопросы конструктивногго функционального анализа. Труды математического института им. Стеклова, т. 113. М., Наука, 1970.
Б. Чандлер, В. Магнус. Развитие комбинаторной теории групп. М., Мир, 1985.
А. Шень. Программирование: теоремы и задачи. М.: МЦНМО, 1995; англ. перевод: A. Shen. Algorithms and programming: problems and solutions. Birkhaeuser, 1996.
G. Boolos. Logic of provability. Cambridge University Press, 1993.
L. Beklemishev, M. Pentus, N. Vereshchagin. Provability, Complexity, Grammars. American Mathematical Society Translations, Series 2, v.192, 1999.

Статьи и сборники статей

Принятые сокращения:

ВМГУ- Вестник МГУ, серия 1. Математика. Механика.
ДАН - Доклады РАН (АН СССР)
ИАН - Известия РАН (ПН СССР), серия математическая
ИВУЗ - Известия высших учебных заведений. Серия Математика
МЗ - Математические заметки
ТВП - Теория вероятностей и ее применения
ТМИ - Труды математического института РАН им. Стеклова
УМН - Успехи математических наук
ФПМ - Фундаментальная и приклодная математика
APAL - Annals of Pure and Applied Logic
ECCC - Electronic Colloquium on Computational Complexity: http://eccc.uni-trier.de/eccc
JSL - Journal of the Symbolic Logic
LNM - Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag

LNCS - Lecture Notes in Computer Science, Springer-Verlag
TCS - Theoretical Computer Science
ZML - Zeitschrift for mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik

[A55] С.И. Адян. О проблеме делимости в полугруппах. ДАН, т. 103 (1955), 747-750.
[A55a] С.И. Адян. Алгоритмическая неразрешимость проблем распознавания некоторых свойств групп. ДАН, т. 103 (1955), 533-535.
[A57] С.И. Адян. Конечно определенные группы и алгоритмы. ДАН, т. 117 (1957), 9-12.
[A57a] С.И. Адян. Неразрешимость некоторых алгоритмических проблем в теории групп. Труды Московского мат. общества, т. 6 (1957), 231-298.
[A57б] С.И. Адян. Роль закона сокращения в представлении полугрупп с сокращением определяющими соотношениями. ДАН, т. 113 (1957), 1191-1194.
[A58] С.И. Адян. Об алгоритмических проблемах в эффективно полных классах групп. ДАН, т. 123 (1958), 13-16.
[A60] С.И. Адян. Проблема тождества в ассоциативных системах специального вида. ДАН, т. 135 (1960), 1297-1300.
[A60a] С.И. Адян. О вложимости полугрупп в группы. ДАН, т. 133 (1960), 255-257
[A65] С.И. Адян. Тождества в специальных полугруппах. ДАН, т. 143 (1962), 499-502.
[A70] S. I. Adjan. Identités dans les groupes. Actes du Congres International des mathematiciens (Nice, 1970), Tome 1, pp. 263-267.
[A70a]] С.И. Адян. Бесконечные неприводимые системы групповых тождеств. ДАН, т.190 (1970), 499-501.
[A70б] С.И. Адян. Бесконечные неприводимые системы групповых тождеств. ИАН, т. 34 (1970), 715-734.
[A71] С.И. Адян. О подгруппах свободных периодических групп нечетного показателя. ТМИ, т. 112 (1971), 64-72.
[A71a] С.И. Адян. О некоторых группах без кручения. ИАН, т. 35 (1971), 459-468.
[A73] S.I. Adjan. Burnside groups of odd exponent and irreducible systems of group identities. Word problems: decision problems and the Burnside problem in group theory (Conf., Univ. California, Irvine, Calif. 1969; dedicated to Hanna Neumann), pp. 19-37. Studies in Logic and the Foundations of Math., v. 71, North-Holland, 1973.
[A73a] С.И. Адян. Работы П.С. Новикова и его учеников по алгоритмическим вопросам алгебры. Математическая логика, теория алгоритмов и теория множеств (посв. 70-летию П.С. Новикова). ТМИ, т. 133 (1973), 23-32.
[A74] S. I. Adyan. Periodic groups of odd exponent. Proceedings of the second international conference on the theory of groups (Australian Nat. Univ., Canberra, 1973), pp. 8-12. LNM, v. 372. Springer, 1974.
[A76] С.И. Адян. Периодические произведения групп. Теория чисел, математический анализ и их приложения. ТМИ, т. 142 (1976), 3-21.
[A76a] С.И. Адян. Преобразования слов в полугруппе, заданной системой определяющих

соотношений. Алгебра и логика, т. 15 (1976), N 6, 611-621.
[A77] С.И. Адян. Аксиоматический метод построения групп с заданными свойствами. УМН, т. 32 (1977), N 1, 3-15.
[A78] С.И. Адян. Простота периодических произведений групп. ДАН т. 241 (1978), N 4, 745-748.
[A+78] С.И. Адян, Г. У. Оганесян. О проблемах равенства и делимости в полугруппах с одним определяющим соотношением. ИАН, т. 42 (1978), N 2, 219-225.
[A80] S.I. Adian. Classifications of periodic words and their applicaion in group theory. In: J. L. Mennicke, editor, Proceedings of a workshop on Burnside groups, Bielefeld, Germany, pp. 1-40. LNM, v. 806. Springer-Verlag, 1980.
[A80a] S.I. Adian. On the word problem for groups defined by periodic relations. In: J. L. Mennicke, editor, Proceedings of a workshop on Burnside groups, Bielefeld, Germany, pp. 41-46. LNM, v. 806. Springer-Verlag, 1980.
[A81] С.И. Адян. Нормальные подгруппы свободных периодических групп. ИАН, т. 45 (1981), N 5, 931-947.
[A82] С.И. Адян. Случайные блуждания в свободных периодических группах. ИАН, т. 46 (1982), N 6, 1139-1149.
[A84] С.И. Адян. Исследования по проблеме Бернсайда и связанным вопросам. Алгебра, математическая логика, теория чисел, топология. ТМИ, т. 168 (1984), 171-196.
[A84a] С.И. Адян. Фрагменты слова Δ в группе кос. МЗ, т. 36 (1984), N 1, 25-34.
[A+84] С.И. Адян, Г. С. Маканин. Исследования по алгоритмическим вопросам алгебры. Алгебра, математическая логика, теория чисел, топология. ТМИ, т. 168 (1984), 197-217.
[A+86] С.И. Адян, Н. Н. Репин. Экспоненциальная нижняя оценка степени нильпотентности энгелевых алгебр Ли. МЗ, т. 39 (1986), N 3, 444-452.
[A+86a] С.И. Адян, В. А. Андрунакиевич, О. Б. Лупанов, Е. В. Падучева, М. Ф. Раца, В. А. Успенский. Александр Владимирович Кузнецов. УМН, т. 41 (1986), N 2, 179-180.
[A+87] С.И. Адян, Г. У. Оганесян. О проблеме слов и делимости в полугруппах с одним соотношением. МЗ, т. 41 (1987), N 3, 412-421.
[A+87a] С.И. Адян, А. А. Разборов. Периодические группы и алгебры Ли. УМН, т. 42 (1987), N 2, 3-68.
[A+88] С.И.Адян, Н. Н. Репин. Нижние оценки порядка максимальных конечно периодических групп . МЗ, т. 44 (1988), N 2, 161-176.
[A+89] S.I. Adian, A.A. Razborov, N.N. Repin. Upper and lower bounds for nilpotency classes of Lie algebras with Engel conditions. Group theory (Singapore, 1987), 57-75, de Gruyter, Berlin, 1989.
[A+91] С.И. Адян, И.Г. Лысенок. О группах с конечными циклическими собственными подгруппами. ИАН, т. 55, N 5 (1991), 933-990.
[A+92] S.I. Adian, I.G. Lysionok.The method of classification of periodic words and the Burnside problem. Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 1 (Novosibirsk, 1989), 13-28, Contemp. Math., 131, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
[A+92a] S.I. Adian, J. Mennicke. On bounded generation of $\mathbf{SL}_n(\mathbf{Z})$. Internat. J. Algebra Comput. 2 (1992), No. 4, 357-365.

[A93] S.I. Adian. On some algorithmic problems for groups and monoids. LNCS, v. 690 (1993), 289-301.

[A94] С.И. Адян. К проблеме делимости для моноидов, заданных одним соотношением. МЗ 1994, т. 55, N 1, с. 3-9.

[A+97] S.I. Adian, I.G. Lysionok, J. G. Mennicke. Defining relations and the algebraic structure of the group SL_2 over integral Hamilton quaternions. Internat. J. Algebra Comput. 7 (1997), No. 1, 1-24.

[A00] С.И. Адян. Группы с периодическими коммутаторами. ДАН, т. 374 (2000), N 2, 151-153.

[A+00] С.И. Адян, В.Г. Дурнев. Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп. УМН, т. 55 (2000), N 2, 3-94.

[A01] С.И. Адян. Мастер фундаментальных конструкций. К 100-летию со дня рождения академика П.С. Новикова. М., 2001.

[Ал+00] M. Alekhnovich, E. Ben-Sasson, A. A. Razborov, A. Wigderson. Pseudorandom generators in propositional proof complexity. FOCS 2000: 43-53

[Ал+00a] M. Alekhnovich, E. Ben-Sasson, A. A. Razborov, A. Wigderson. Space complexity in propositional calculus. STOC 2000: 358-367

[Ал+01] M. Alekhnovich, S.R. Buss, S. Moran, T. Pitassi. Minimum propositional proof length is NP-hard to linearly approximate. MFCS 1998: 176-184, 2001

[Ан85] А.Е. Андреев. О методе получения нижних границ для сложности индивидуальных монотонных функций. ДАН СССР, т. 282 (1985), 1033-1037.

[Ар80] С.Н. Артёмов. Арифметически полные модальные теории. Семиотика и информатика, вып. 14, с. 115-133. М.,1980 .

[Ар85] С.Н. Артёмов. Неарифметичность модальной логики доказуемости. ДАН, т. 284 (1985), N 2, с. 270-271.

[Ар85] С.Н. Артёмов. Модальные логики, аксиоматизирующие доказуемость. ИАН, т. 49 (1985), N 6, 1123-1154.

[Ар86] С.Н. Артёмов. Нумерически корректные логики доказуемости. ДАН, т. 290 (1986), N 6, 1289-1292.

[Ар86а] С.Н. Артёмов. Суперинтуиционистские логики, имеющие доказуемостную нтерпретацию. ДАН, т. 291 (1986), N 6, 1289-1291.

[Ар+87] С.Н.Артёмов, Г.К. Джапаридзе. Эффективные предикатные логики доказуемости. ДАН, т. 297 (1987), N 3, 521-523.

[Ар88] С.Н. Артёмов. О логиках, имеющих доказуемостную интерпретацию. Вопросы кибернетики, 1988, N 136, 5-22.

[Ар88а] С.Н. Артёмов. Степени неразрешимости расширений арифметики истинными утверждениями. УМН, 1988, т.43, N 2, 127-128.

[Ар88б] С.Н. Артёмов. Вопросы аксиоматизируемости и полноты модальных логик доказуемости. Докторская диссертация. М.,1988.

[Ар90] С.Н. Артёмов. О равномерной арифметической полноте модальных логик доказуемости. МЗ, т. 48 (1990), N 1, 3-9.

[Ар90а] S.Artemov. Kolmogorov logic of problems and a provability interpretation of intuitionistic logic. In : Theoretical aspects of reasoning about knowledge - III, Proceedings. Morgan Kaufman Publ., pp. 257-272, 1990.

[Ар94] S. Artemov. Logic of proofs. APAL, v. 67, pp. 29-59, 1994.

[Ар99] S. Artemov. Realization of intuitionistic logic by proof polynomials. Journal of Applied Non-Classical Logics, v. 9, No. 2-3, pp. 285-302, 1999.

[Ар01] S.Artemov. Explicit provability and constructive semantics. Bulletin of Symbolic Logic, v. 7, No.1, pp.1-36, 2001.

[Ар99а] S. Artemov. On explicit reflection in theorem proving and formal verification. In: Springer Lecture Notes in Artificial Intelligence v. 1632, Automated Deduction - CADE-16. Proceedings of the 16th International Conference on Automated Deduction, Trento, Italy, July 1999, pp. 267-281, 1999.

[Ар99б] S. Artemov. Uniform provability realization of intuitionistic logic, modality and lambda-terms. Electronic Notes on TCS v. 23, No. 1, 1999

[Ар01] S. Artemov. Operations on proofs that can be specified by means of modal logic. Advances in Modal Logic, v. 2. CSLI Publications, Stanford University, pp.59-72, 2001.

[Ар+93] S. Artemov, L.D. Beklemishev. On propositional quantifiers in provability logic. Notre Dame Journal of Formal Logic, v. 34 (1993), No. 3, 401-419.

[Ар+93а] S.Artemov, T. Strassen. The logic of the Godel proof predicate. LNCS, v. 713, pp. 71-82. Springer-Verlag, 1993.

[Ар+93б] S. Artemov, T. Strassen. The basic logic of proofs. LNCS, v. 702, pp. 14-28. Springer-Verlag, 1993.

[Ар+94] S. Artemov, G.K. Dzhaparidze. Finite Kripke models and predicate logics of provability. JSL, v. 55 (1990), No. 3, 1090-1098.

[Ар+94а] S.I. Artemov, V.N. Krupski. Referential data structures and labeled modal logic. LNCS, v. 813, p. 23-33. Springer-Verlag, 1994.

[Ар+94б] S. Artemov , F. Montagna. On first order theories with provability operator. JSL, v. 59, No. 4, 1994.

[Ар+96] S.Artemov, V.Krupski. Data storage interpretation of labeled modal logic. APAL, v.78 (1996), 57-71.

[Ар+96а] S. Artemov, A. Chuprina. Logic of proofs with complexity operators. Logic and Algebra, (Pontignano, 1994), 1-24. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 180. Marcel Dekker, 1996.

[Ар+99] S. Artemov, B. Kushner, G. Mints, E. Nogina, A. Troelstra. In memoriam: Albert G. Dragalin, 1941-1998. Bulletin of Symbolic Logic, v.5 (1999), No. 3, 389-391.

[Ар+99а] S. Artemov, E. Kazakov , D. Shapiro. On logic of knowledge with justifications. Technical Report CFIS 99-12, Cornell University, 1999.

[Ар+01] S. Artemov, T. Yavorskaya. On the first order logic of proofs. Moscow Mathematical Journal, v.1 (2001), No. 4, 475-490.

[Ас88] Е.А. Асарин. Индивидуальные случайные сигналы - сложностной подход. Кандидатская диссертация. М., МГУ, 1988.

[Ба96] И.Г. Башмакова, С.С. Демидов, В.А. Успенский. Софья Александровна Яновская. Modern Logic, 1996, v. 6, No. 4, pp.357-372.

[Б87] Л.Д. Беклемишев. Нормализация доказательств и интерполяция для некоторых логик доказуемости. УМН, т. 42 (1987), 179-180.

[Б89] Л.Д. Беклемишев. Логика доказуемости без интерполяционного свойства Крейга. МЗ, т. 45 (1989), 12-22.

[Б89а] Л.Д.Беклемишев. О классификации пропозициональных логик доказуемости. ИАН, т. 53 (1989), 915-943.

[Б91] L. Beklemishev. Provability logics for natural Turing progression of arithmetical theories. Studia Logica, v.50 (1991), 107-128.

[Б92] Л.Д.Беклемишев. Классификация пропозициональных логик доказуемости. Кандидатская диссертация. М, 1992.

[Б92а] Л.Д.Беклемишев. Независимые нумерации теорий и рекурсивные прогрессии. Сибирский математический журнал, т. 33 (1992), 22-46.

[Б93] L.D. Beklemishev. On the complexity of arithmetical interpretations of modal formulae. Archive for Mathematical Logic, 32 (1993), 229-238.

[Б94] L.D. Beklemishev. On bimodal logics of provability. APAL, v.68 (1994), 115-159.

[Б95] Л.Д.Беклемишев. Об ограниченном правиле индукции и итерированных принципах рефлексии над элементарной по Кальмару арифметикой. В сб. под. ред. О.Б. Лупанова "Теоретические и прикладные аспекты математических исследований." Изд-во МГУ, М., 1995, 36-39.

[Б95а] L.Beklemishev. Iterated local reflection versus iterated consistency. APAL, v.75 (1995), No. 1-2, p. 25-48.

[Б96] L.D. Beklemishev. Bimodal logics for extensions of arithmetical theories. JSL, v. 61 (1996), 91-124.

[Б96а] L.D. Beklemishev. Remarks on Magari algebras of PA and ID_0+EXP. In: Logic and Algebra, P.Agliano, A.Ursini, eds., Marcel Dekker, New York, 1996, 317-325.

[Б97] L.D. Beklemishev. Induction rules, reflection principles, and provably recursive functions. APAL, v. 85 (1997), 193-242.

[Б97а] L. Beklemishev. Parameter-free induction and reflection. In: Computational logic and proof theory. G. Gottlob, A. Leitsch, D. Mundici, eds. LNCS v. 1289, Springer, 1997, p. 103-113.

[Б97б] L.D. Beklemishev. Notes on local reflection principles. Theoria, v. 58 (1997), No. 3, 139-146.

[Б98] Л.Д. Беклемишев. Принципы рефлексии в формальной арифметике. Докторская диссертация. М.,1998.

[Б98а] L.D. Beklemishev. A proof-theoretic analysis of collection. Archive for Mathematical Logic, 34 (1998), No. 4-5, 216-238.

[Б99] L.D. Beklemishev. Parameter-free induction and provably total computable functions. TCS, v. 224 (1999), No. 1-2, 13-33.

[Б99а] L.D. Beklemishev. Open least element principle and bounded query computation. In J. Flum et al., editors, Computer Science Logic. CSL'99 Proceedings. LNCS, v. 1683. Springer-Verlag, 1999, p. 389-404.

[Б00] L.D. Beklemishev. Another pathological well-ordering. In ñ. Buss et al., editors, Logic

Colloquium '98 Proceedings. Lecture Notes in Logic , v. 13, A.K.Peters, Ltd., Natick MA, 2000, p. 105-108.

[Бо85] Е.С. Божич. Локальная непротиворечивость арифметики с предикатом "достижимости". ВМГУ, 1985, N 5, 37-41.

[Бо86] Е.С. Божич. Об арифметике с понятием “достижимого числа” ИАН, т. 50 (1986), N 6, 1123-1155.

[Бо87] Е.С. Божич. О сложности выводов в арифметических теориях. Кандидатская диссертация. М., МГУ, 1987.

[Бор69] В. В. Борисов. Простые примеры групп с неразрешимой проблемой слов. МЗ, т. 6 (1969), 768-775.

[Бу79] Б.Л. Будинас. Три линейно упорядоченные степени конструктивности $\Delta^1{}_3$-чисел. ВМГУ, 1979, N 5, 3-6.

[Бу80] Б.Л. Будинас. Частичное упорядочение $\Delta^1{}_n$-степеней подмножеств натуральных чисел. ВМГУ, 1980, N 3, 15-18.

[Бу80a] Б.Л. Будинас. Аналитическая определимость конструктивных действительных чисел. МЗ, т. 28 (1980), N 2, 177-186.

[Бу81] Б.Л. Будинас. Построение определимых степеней конструктивности. Сибирский мат. журнал, т. 22 (1981), N 1, 35-46.

[Бу81a] Б.Л. Будинас. Принцип селектора и аналитическая опредилимость действительных чисел в расширениях конструктивного универсума. В кн.: Математическая логика и математическая лингвистика, с. 13-23. Калинин. гос. унив., Калинин, 1981.

[Бу82] Б.Л. Будинас. О принципе селектора и аналитической определимости конструктивных множеств. УМН, т. 37 (1982), N 2, 193-194.

[Бу83] Б.Л. Будинас. Существование полного A_2-упорядочения континуума не следует из принципе селекции для аналитических отношений эквивалентности. Мат. сборник, т. 120(162) (1983), N 2, 164-179.

[Вар79] В.А. Варданян. Об одной формализации логики принятия решений. Семиотика и информатика, в. 11, с. 66-80. М., ВИНИТИ, 1979.

[Вар81] В.А. Варданян. Мудрецы: логика знаний и действий. В кн.: Математическая логика и математическая лингвистика, с. 31-37. Калинин. гос. унив., Калинин, 1981.

[Вар85] В.А. Варданян. Арифметическая сложность предикатных логик доказуемости и их фрагментов. ДАН, т. 288 (1985), N 1, 11-14.

[Вер84] Н.К. Верещагин. О нулях линейных рекуррентных последовательностей. ДАН, т. 278 (1984), N 5, 1036-1039.

[Вер85] Н.К. Верещагин. О проблеме появления нуля в линейной рекуррентной последовательности. Математические заметки, т. 38 (1985), N 2, 177-189.

[Вер86] Н.К. Верещагин. Эффективные верхние границы числа нулей в линейных рекуррентных последовательностях. ВМГУ, 1986, N 1, 25-30.

[Вер90] Н.К. Верещагин. Новое доказательство разрешимости элементарной теории линейно упорядоченных множеств. МЗ, 1990, т. 47, N 5, с. 31-38.

[Вер92] N. Vereshchagin. On the power of PP. Proc. 7th Annual IEEE Conference on Structure in Complexity Theory, Boston, MA, 1992, 138-143.

[Вер+92] L.A. Hemaspaandra, C. Jain, N.K. Vereshchagin. Banishing robust Turing completeness. Intern. J. on Found. of Comp. Science, 1993, v. 3-4, pp. 245-265. Conference version appeared in: Logical Foundations of Computer Science. 1992. Proceedings. (LNCS, 620, 186-197)

[Вер93] Н.К. Верещагин. Соотношения между NP-множествами, co-NP- множествами и P-множествами относительно случайных оракулов. ИВУЗ, 1993, N 3, с. 31-39.

[Вер93а] Н.К. Верещагин. Релятивизуемые и нерелятивизуемые теоремы полиномиальной теории алгоритмов. ИАН, т. 57 (1993), N 2, 51-90.

[Вер93б] N. Vereshchagin. Relationships between NP-sets, coNP-sets and P-sets relative to random oracles. Proc. 8th Conference on Structure in Complexity Theory, 1993, 132-138.

[Вер95] Н.К. Верещагин. Оракульное отделение некоторых сложностных классов и нижние оценки сложности персептронов, решающих некоторые проблемы отделения. ИАН,т. 59 (1995), N 6, с. 3-31.

[Вер95а] N.K. Vereshchagin. Lower bounds for perceptrons solving some separation problems and oracle separation of AM from PP. Proc. Third Israel Symposium on Theory of Computing and Systems, Tel-Aviv, Jan. 1995, 46-51.

[Вер95б] N.Vereshchagin. NP-sets are co-NP-immune relative to a random oracle. Third Israel Symposium on Theory of Computing and Systems, Tel-Aviv, Jan. 1995, 40-45.

[Вер+95] O.Mitina, N. Vereshchagin. How to use several noisy channels with unknown error probabilities. Preliminary version: "How to use expert advice in the case when actual values of estimated events remain unknown". Proc. Eighth Annual Conference on Computational Learning Theory (July 5th-8th), 1995, Santa Cruz, California, 91-97.

[Вер98] N. Vereshchagin. Randomized boolean decision trees: Several remarks. TCS, v. 207 (1998), 329-342.

[Вер+98] B. Durand, M. Dauchet, C. Porrot, and N. Vereshchagin. Deterministic rational transducers and random sequences. Proc. of Symp. Fondations of Software Systems and Computation Structures (FOSSACS), Lisbon, March-April 1998, LNCS v. 1378, pp. 258-272.

[Вер+99] A. Razborov, N. Vereshchagin. One property of cross-intersecting families. ECCC, TR99-014.

[Вер+99а] R. Raz, G. Tardos, O. Verbitsky, N. Vereshchagin. Arthur-Merlin games in Boolean decision trees. Journal of Computer Systems Sciences, v. 59 (1999), p. 346-372.

[Вер02] N. Vereshchagin. Kolmogorov complexity conditional to large integers. TCS, v. 271 (2002), 59-67.

[Вер+02] N. Vereshchagin, M. Vyugin. Independent minimum length programs to translate between given strings. TCS, v. 271 (2002), 131-143.

[Вер+02а] Н. Верещагин, А. Чернов. Реализуемость пропозициональных формул и колмогоровская сложность. Текст представлен в ИАН, 2001.

[Ви01] Д.А. Витер. О конструктивной теории равенства. ВМГУ, 2001, N 6, 51-63.

[Во85] В.Г. Вовк. Алгоритмическая теория информации и проблема предсказания. В кн.:

Сложностные проблемы математической логики, 21-24, Калининский гос. унив. Калинин, 1985.
[Во86] В.Г. Вовк. Понятие свойства Бернулли. УМН, т. 41 (1986), N 1 (247), 185-186.
[Во87] В.Г. Вовк. О критерии случайности. ДАН, т. 294 (1987), N 6, 1298-1302.
[Во87а] В.Г. Вовк. Закон повторного логарифма для случайных по Колмогорову и хаотических последовательностей. ТВП, т. 32 (1987), N 3, 456-468.
[Во88] В.Г. Вовк. О законе повторного логарифма Колмогорова - Стаута . Мат. заметки, 1988, т. 44, N 1, с. 27-37.
[Во88а] В.Г. Вовк. Прогнозируемость алгоритмических случайных последовательностей. Кандидатская диссертация, М., МГУ, 1988.
[Во+88] В.Г. Вовк, А.Л. Семенов, С.Ф. Сопрунов. Некоторый способ проверки правильности программ на Ассемблере. Вопросы кибернетики, 1988, N 136, с. 56-78.
[Во89] В.Г. Вовк. Предсказание стохастических последовательностей. Проблемы передачи информации, т. 25 (1989), N 4, 35-49.
[Во91] В.Г. Вовк. Асимптотическая эффективность оценок: алгоритмический подход. ТВП, т. 36 (1991), N 2, 247-261.
[Вью72] В.В. Вьюгин. О дискретных классах рекурсивно перечислимых множеств. Алгебра и логика, 1972, т.11, N3, с.243-256.
[Вью73] В.В. Вьюгин. О минимальных нумерациях вычислимых классов рекурсивно перечислимых множеств. ДАН, 1973, т.212, N2, с.273-272.
[Вью73а] В.В. Вьюгин. О некоторых примерах верхних полурешеток вычислимых нумераций. Алгебра и логика, 1973, т.12, N5, с.512-529.
[Вью74] В.В. Вьюгин. Сегменты рекурсивно перечислимых m-степеней. Алгебра и логика, 1974, т.13, N6, с.635-654.
[Вью74а] В.В. Вьюгин. О верхних полурешетках нумераций. ДАН, 1974, т.217, N4, с.749-751.
[Вью75] В.В. Вьюгин. О структуре верхних полурешеток вычислимых нумераций. Кандидатская диссертация. М., 1975
[Вью76] В.В. Вьюгин. Об инвариантных по Тьюрингу множествах. ДАН, 1976, 217, N4, с. 790-793.
[Вью+77] V.V. Vyugin, L.A. Levin. Invariant properties of informational bulks. LNCS, 1977, v.53, p. 359-364.
[Вью81] В.В. Вьюгин. Алгоритмическая энтропия (сложность) конечных объектов и ее применения к определению случайности и количества информации Семиотика и информатика, В. 16. М.: ВИНИТИ, 1981, с.14-43.
[Вью82] В.В. Вьюгин. Алгебра инвариантных свойств двоичных последовательностей. Проблемы передачи информации, 1982, т.18, N2, с.83-100.
[Вью83] В.В. Вьюгин. О вычислимости параметра в схеме Бернулли. Проблемы передачи информации, 1983, т.19, N1, с.100-105.
[Вью85] В.В. Вьюгин. О нестохастических объектах. Проблемы передачи информации, 1985, т. 21, N2, с.3-9.
[Вью86] V.V. Vyugin. Some estimates for nonstochastic sequences. Proc. of the 1st World Congress of

the Bernoulli Society, Tashkent USSR, 8-14 September, Vol. 1, Probability theory and applications, ed. Yu.A.Prohorov, V.V.Sazonov, 1986, p.173-176.

[Вью87] В.В. Вьюгин. О дефекте случайности конечного объекта относительно мер с заданными границами их сложности. ТВП, 1987, т.32, N3, с.558-563.

[Вью+93] V.V. V'yugin, V.G. Vovk. On the empirical validity of the Bayesian method. Journal of the Royal Statistical Society B, 1993, v.55, N1, p.253-266.

[Вью+94] V.V. V'yugin, V.G. Vovk. Prequential level of impossibility. Journal of the Royal Statistical Society B, 1994, v. 56, No. 1, p. 115-123.

[Вью96] В.В. Вьюгин. Эргодическая теорема для индивидуальной случайной последовательности. УМН, 1996, т. 51, N1, с. 191-192.

[Вью96а] V. V'yugin. Bayesianism: an algorithmic analyis . Inform. and Comput., 1996, v. 127, N 1, pp. 1-10.

[Вью97] В.В. Вьюгин. Эффективная сходимость по вероятности и эргодическая теорема для индивидуальных случайных последовательностей. ТВП, 1997, т.42, N1, с.35-50.

[Вью97а] В.В. Вьюгин. О длине максимальной серии "успехов" в индивидуальной случайной последовательности. ТВП, 1997, т. 42, N 3, с. 608-615.

[Вью98] V.V. V'yugin. Ergodic theorems for individual random sequences. TCS, 1998, v. 207, No. 4, p. 343-361.

[Вью98а] V.V. V'yugin. Non-stochastic infinite and finite sequences. TCS, 1998, v.207, N4, p.363-382.

[Вью99] V.V. V'yugin. Algorithmic complexity and stochastic properties of finite binary sequences. The Computer Journal, 1999, v.42, N4, p.294-317.

[Вью01] В.В. Вьюгин. О неустойчивости индивидуальной эргодической теоремы. Проблемы передачи информации, 2001, т. 37, N 2, с. 27-39.

[Вью01а] V.V. V'yugin. Most sequences are stochastic. Information and Computation, 2001, v.168, p. 1-12.

[ВьюМ00] M.V. Vyugin. Information distance and conditional complexities. ECCC (16): (2000)

[ВьюМ+00] M.V. Vyugin, V. Vyugin. Non-linear inequalities between predictive and Kolmogorov complexity. ECCC (52): (2001) 2000

[ВьюМ+00а] N. K. Vereshchagin, M.V. Vyugin. Independent minimum length programs to translate between given strings. IEEE Conference on Computational Complexity 2000: 138

[ВьюМ+01] M.V. Vyugin, V. Vyugin. Predictive complexity and information. ECCC (43): (2001)

[ВьюМ+01а] Y.Kalnishkan, M. Vyugin, V.Vovk: Loss functions, complexities, and the Legendre transform. To appear in Proceedings of ALT, 2001.

[ВьюМ+01б] I. Nouretdinov, V. Vovk, M.V. Vyugin, A. Gammerman. Pattern recognition and density estimation under the general i.i.d. assumption. COLT/EuroCOLT 2001: 337-353.

[G75] Г.К. Гаргов. Интуиционистский анализ и промежуточные логики. ДАН, т. 224 (1975), N 6, 1245-1247.

[G76] G.K. Gargov. Kripke models for intuitionistic theories of sequences. Annuaire Univ. Sofia Fac. Math. Méc. 71 (1976/77), No. 2, 143-156.

[Го91] К. И. Горбунов. Не существует рекурсивно перечислимого семейства контекстно-свободных грамматик, порождающего класс однозначных языков. МЗ, т. 50 (1991), N 1, 34-40.

[Го91а] К. И. Горбунов. Контекстно-свободная выводимость графов, не реализующих плоскую решетку. ДАН, т. 316 (1991), N 2, 270-274.

[Го98] K. Yu. Gorbunov. An estimate of the tree-width of a planar graph which has not a given planar grid as a minor. Graph-theoretic concepts in computer science (Smolenice Castle, 1998), 372-383. LNCS, v. 1517, 1998.

[Го98а] K. Yu. Gorbunov. On a complexity of the formula $(A \vee B) \Rightarrow C$. TCS, v. 207 (1998), No. 2, 383-386.

[Го+99] R. Diestel, T.R. Jensen, K.Yu. Gorbunov, C. Thomassen. Highly connected sets and the excluded grid theorem. J. Combin. Theory Ser. B 75 (1999), No. 1, 61-73.

[Гор86] С.В. Горячев. Об интерпретируемости некоторых расширений арифметики. МЗ, т. 40 (1986), N 5, 561-571.

[Гор89] С.В. Горячев. Арифметика с локальным принципом рефлексии для россеровской формулы доказуемости. МЗ, т. 46 (1989), N 3, 12-21.

[Гри76] Д.Ю. Григорьев. Алгоритмы Колмогорова сильнее, чем машины Тьюринга. Записки научн. семинаров ЛОМИ, т. 60 (1976), 29-37.

[Гр69] В. Н. Гришин. Непротиворечивость некоторого фрагмента системы NF Куайна. ДАН, т. 189 (1969), 241-243.

[Гр72] В. Н. Гришин. Эквивалентность системы NF Куайна некоторому ее фрагменту. Научная и техн. информация (ВИНИТИ), сер. 2, 1972, N 1, 22-24.

[Гр72а] В. Н. Гришин. Теория множеств Цермело-Френкеля с гильбертовскими t -термами. МЗ, т. 12 (1972), 569-575.

[Гр73] V.N. Grishin An investigation of some versions of Quine's system. Automated Document. and Math. Linguistics, v. 7 (1973), Íî. 2, 43-48.

[Гр76] В. Н. Гришин. Редукция аксиомы свертывания данной длины к аксиоме свертывания меньшей длины. Исследования по теории множеств и неклассическим логикам, 174-180. М., Наука,1976.

[Дж86] Г. Джапаридзе. Модально-логические средства изучения доказуемости. Кандидатская диссертация. М., МГУ, 1986.

[Дж86б] Г. Джапаридзе. Теория доказательств и некоторые модальные системы. Методы логических исследований. Тбилиси, Мецниереба, 1986, с. 39-47.

[Дж88] Г. Джапаридзе. Полимодальная логика доказуемости. Интенсиональные логики и логическая структура теорий. Тбилиси, Мецниереба, 1988, с.16-48.

[Дж90] G. Dzhaparidze. Decidable and enumerable predicate logics of provability. Studia Logica, v. 49 (1990), N 1, pp.7-21.

[Дж91] Г. Джапаридзе. Пропозициональная логика истинности и доказуемости. Логико-философские исследования. М., 1991, с. 43-52.

[Дж91а] G. Dzhaparidze. Predicate provability logic with non-modalized quantifiers. Studia Logica, v. 50 (1991), No 1, pp.149-160.

[Дж92] G. Dzhaparidze. The logic of linear tolerance. Studia Logica, v. 51 (1992), No. 2, pp. 249-277.

[Дж93] G. Dzhaparidze. A generalized notion of weak interpretability and the corresponding modal logic. APAL, v. 61 (1993), No. 1-2, pp.113-160.

[Дж94] G. Dzhaparidze. The logic of the arithmetical hierarchy. APAL, v. 66 (1994), No. 2, pp.89-112.

[Дж86а] Г. Джапаридзе. Принципы доказуемости и расширения арифметики. Нестандартные семантики неклассических логик. М., 1986, с. 89-98.

[Др67] А.Г. Драгалин. Конструктивные трансфинитные системы и построение алгоритма по трансфинитной индукции. ДАН, т. 175 (1967), 993-996.

[Др67а] А.Г. Драгалин. К обоснованию принципа конструктивного подбора А.А. Маркова. ДАН, т. 177 (1967), 13-16.

[Др68] А.Г. Драгалин. Вычислимость примитивно-рекурсивных термов конечного типа и примитивно-рекурсивная реализуемость. Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 8 (1968), 32-45.

[Др68а] А.Г. Драгалин. Лексикографические операторные алгоритмы. Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 8 (1968), 46-52.

[Др69] А.Г. Драгалин. Трансфинитные пополнения конструктивного арифметического исчисления. ДАН, т. 189 (1969), 458-460.

[Др72] А.Г. Драгалин. Использование классических исчислений для установления конструктивной истинности. ВМГУ, т. 27 (1972), N 2, 25-29.

[Др73] А.Г. Драгалин. Constructive mathematics and models of intuitionistic theories. Logic, methodology and philosophy of science, IV (Proc. Fourth Internat. Congr., Bucharest, 1971), pp. 111-128. Studies in Logic and Foundations of Math., v. 74. North-Holland, 1973.

[Др73а] А.Г. Драгалин. К интуиционистской теории моделей. История и методология естественных наук, в. XIV: Математика, механика, с. 106-126. М., Изд. МГУ, 1973.

[Др74] А.Г. Драгалин. Полнота арифметики с конструктивным правилом бесконечной индукции. В сб.: Теория алгоритмов и математическая логика (посвящ. 70-летию А. А. Маркова), 14-33. Вычисл. центр АН СССР, М., 1974.

[Др74а] А.Г. Драгалин. Конструктивные модели теорий интуиционистских последовательностей выбора. Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам, с. 214-252. М., Наука, 1974.

[Др74б] А.Г. Драгалин. Конструктивная модель интуиционистского анализа. Философия и логика, с. 55-78. М., Наука, 1974.

[Др77] А.Г. Драгалин. Устранение сечения в теории определимых множеств натуральных чисел. В кн.: Теория множеств и топология, с. 27-36. Ижевск, 1977; англ. перевод: A.G. Dragalin. Cut-elimination in the theory of definable sets of natural numbers. Publ. Math. Debrecen, v. 51 (1997), Но. 1-2, 153-164.

[Др79] А.Г. Драгалин. Сильная теорема о нормализации выводов в исчислении секвенций Генцена. В кн.: Исследования по теории алгоритмов и математической логике, с. 26-39. М., Наука, 1979.

[Др79а] А.Г. Драгалин. Алгебраический подход к интуиционистским моделям типа реализуемости. Исследование по неклассическим логикам и теории множеств. М., Наука, 1979, 183-200.

[Др79б] А.Г. Драгалин. Функциональные алгебраические модели. Семиотика и информатика, v. 13, с. 184-195. М., ВИНИТИ, 1979.
[Др79в] А.Г. Драгалин. Алгебраические модели интуиционистских теорий. В кн.: Логический вывод (Москва, 1974), с. 206-245. М., Наука, 1979.
[Др80] А.Г. Драгалин. Новые виды реализуемости и правило Маркова. ДАН, т. 251 (1980), N 3, 534-537.
[Др85] A. G. Dragalin.Correctness of inconsistent theories with notions of feasibility. Computation theory (Zaborów, 1984). LNCS, v.208 (1985), 58-79.
[Др86] A. G. Dragalin. A completeness theorem for higher-order intuitionistic logic: an intuitionistic proof. In: Mathematical logic and its applications (Druzhba, 1986), 107-124. Plenum Press,1987.
[Др86a] A. G. Dragalin. Cut-elimination theorem for higher-order classical logic: an intuitionistic proof. In: Mathematical logic and its applications (Druzhba, 1986), 243-251. Plenum Press, 1987.
[Др93] А.Г. Драгалин. Теоремы о полноте и устранении сечения в классической логике высшего порядка. ИВУЗ, 1993, N 3, 3-18.
[Др+69] А.Г. Драгалин, В. А. Любецкий. Построение эффективно недостижимого кардинала в естественном расширении системы Цермело-Френкеля. ДАН, т. 187 (1969), 1225-1228.
[Др+71] А.Г. Драгалин, В. А. Любецкий, В.И. Фуксон. Определимые последовательности счетных ординалов. ДАН, т. 196 (1971), 1263-1265.
[Др+74] А.Г. Драгалин, Н. М. Нагорный, Н. В. Петри, Н. А. Шанин. Андрей Андреевич Марков (к 70-летию со дня рождения). УМН, т. 291 (1974), N 6, 187-191.
[Др+79] В. А. Бочаров, Е. К. Войшвилло, А.Г. Драгалин, В. А. Смирнов. Некоторые проблемы развития логики. Вопросы философии, 1979, N 6, 102-114.
[Ду64] В.А. Душский. Характерные эксперименты с автоматами. Проблемы кибернетики, N 11, 1964, 257-262.
[Ду69] В.А. Душский. Продолжение частично рекурсивных функций и функций с рекурсивным графиком. МЗ, т. 5 (1969), 261-267.
[Ду74] В.А. Душский. Нумерационная сводимость перечислимых классов множеств. ZML, Bd. 20 (1974), 19-30.
[Ду75] В.А. Душский. О невозможности эффективного перечисления всех формализаций понятия алгоритма. Математический анализ и его приложения. Труды МИЭМ, в. 5. М., 1975, с. 3-8.
[E00] A. V. Evfimievski. A probabilistic algorithm for updating files over a communication link. TCS, v. 233 (2000), 191-199.
[З01] Е.Е. Золин. Относительная интерпретируемость модальных логик. ФПМ, т. 7 (2001), N 1, 47-69.
[З00] E. Zolin. Embeddings of propositional monomodal logics. Logic Journal of the IGPL, v. 8 (2000), No. 6, 861-882.
[З97] Е.Е. Золин. Интерполяционное свойство Крейга в логиках доказательств с оператором сильной доказуемости. ВМГУ, 1997 , N 4, 53-55.
[И93] K. Ignatiev. On strong provability predicates and the associated modal logics. JSL, v. 58 (1993),

pp.249-290.
[И93а] K.N. Ignatiev. The provability logic for Σ_1-interpolability. APAL, v. 64 (1993), 1-25.
[Ка73] В.Г. Кановей. Проблема сингулярных кардиналов. МЗ, т. 13 (1973), 717-724.
[Ка74] В.Г. Кановей. Степени конструктивности и дескриптивные свойства множества действительных чисел в инициальной модели и ее расширениях. ДАН, т. 216 (1974), 728-729.
[Ка75] В.Г. Кановей. Независимость некоторых предложений дескриптивной теории множеств и арифметики второго порядка. ДАН, т. 223 (1975), N 3, 552-554.
[Ка75а] В.Г. Кановей. Мажорирование начальных отрезков степеней конструктивности. МЗ, т. 17 (1975), N 6, 939-946.
[Ка76] В.Г. Кановей. Определимость с помощью степеней конструктивности. Исследования по теории множеств и неклассическим логикам, 5-95. М., Наука, 1976.
[Ка78] В.Г. Кановей. Существенность параметров и сложность фундаментальной формулы схемы свертывания в арифметике второго порядка. ДАН, т. 243 (1978), N 6, 1384-1386.
[Ка78а] В.Г. Кановей. О непустоте классов в аксиоматической теории множеств. ИАН, т. 42 (1978), N 3, 550-579.
[Ка78б] В.Г. Кановей. Доказательство одной теоремы Лузина. МЗ, т. 23 (1978), N 1, 61-66.
[Ка79] В.Г. Кановей. Одно следствие аксиомы Мартина. МЗ, т. 26 (1979), N 1, 113-121.
[Ка79а] В.Г. Кановей. О дескриптивных формах счетной аксиомы выбора. Исследования по неклассическим логикам и теории множеств. М., Наука, 1979, с. 3-136.
[Ка79б] В.Г. Кановей. Множество всех аналитически определимых множеств натуральных чисел может быть аналитически определимым. ИАН, т. 43 (1979), N 6, 1259-1293.
[Ка79в] В.Г. Кановей. Выразимость вынуждающей формулы в анализе. ВМГУ, N 2 (1979), 3-13.
[Ка80] В.Г. Кановей. О некоторых проблемах дескриптивной теории множеств и связи конструктивности и определимости. ДАН, т. 253 (1979), N 4, 800-803.
[Ка81] В.Г. Кановей. Теория Цермело без аксиомы степени и теория Цермело - Френкеля без аксиомы степени равнонепротиворечивы. МЗ, т. 30 (1981), N 3, 407-419.
[Ка82] В.Г. Кановей. О проблемах Н.Н. Лузина о вложимости и разложении проективных множеств. МЗ, т. 32 (1982), N 1, 23-39.
[Ка82а] В.Г. Кановей. Проективная иерархия Н.Н. Лузина: современное состояние теории. В кн.: Справочная книга по математической логике под ред. Дж. Барвайса, т. 2. Теория множеств, с. 273-364. М., Наука, 1982.
[Ка83] В.Г. Кановей. Ответ на вопрос Н.Н. Лузина об отделимости СА-кривых. МЗ, т. 33 (1983), N 3, 435-437.
[Ка83а] В.Г. Кановей. Обобщение теоремы П.С. Новикова о сечениях борелевских множеств. МЗ, т. 33 (1983), N 2, 289-292.
[Ка85] В.Г. Кановей. Развитие дескриптивной теории множеств под влиянием работ Н.Н. Лузина. УМН, т. 40 (1985), N 3, 117-155.
[Ка87] В.Г. Кановей. О проблемах Н. Н. Лузина о существовании СА-множеств, не имеющих совершенных подмножеств. МЗ, т. 41 (1987), в. 5, 750-757.
[Ка88] В.Г. Кановей. Корректность метода Эйлера разложения функции sin в бесконечное

произведение. УМН, т. 43 (1988), N 4, 57-81.
[Ка88а] В.Г. Кановей. Идеи А.Н. Колмогорова в теории операций на множествах. ÓÌÍ, ò. 43 (1988), N 6, 93-128.
[Ka95] V. Kanovei. Uniqueness, collection, and external collapse of cardinals in IST and models of Peano Arithmetic. JSL, v. 60 (1995), No. 1, 318-324
[Ka+95] V. Kanovei, M. Reeken. Summation of divergent series from the nonstandard point of view. Real Analysis Exchange 21 (1995/96), Nr. 2, 473-497
[Ka+95a] V. Kanovei, M. Reeken. Internal approach to external sets and universes. Studia Logica, v. 55 (1995), No. 2, 229-257; No. 3, 347-376; v. 56 (1996), No. 3, 293-322
[Ka+97] V. Kanovei, M. Reeken. Isomorphism property in nonstandard extensions of the ZFC universe". APAL, v. 88 (1997), No. 1, 1-25.
[Ka+97a] V. Kanovei, M. Reeken. Mathematics in a nonstandard world. Math. Japon., v. 45 (1997), No. 2, 369-408 ; No. 3, 555-571.
[Ka+97б] V.G. Kanovei, M. van Lambalgen. On a Spector ultrapower for the Solovay model. Math. Log. Quart., v. 43 (1997), No. 3, 389-395.
[Каш84] Ф.Р. Кашапова. Определение классов конструктивно выводимых теорем в многосортной интуиционистской теории множеств, эквивалентной арифметике второго порядка. ДАН, т. 276 (1984), N 4, 782-786.
[Каш84а] Ф.Р. Кашапова. Конструктивная теория множеств с типами, и совместимость с тезисом Черча. ВМГУ, 1984, N 4, 72-75.
[Каш89] Ф.Р. Кашапова. Интуиционистская теория функционалов высшего типа. МЗ, т. 45 (1989), N 3, 66-79.
[Ки67] М.М. Кипнис. Об одном свойстве пропозициональных формул. ДАН, т. 174 (1967), 277-278.
[Ки71] М.М. Кипнис. О реализациях предикатных формул. Записки научн. семинаров ЛОМИ, т. 20 (1971), 40-48.
[К25] А. Н. Колмогоров. О принципе tertium non datur. Мат.сборник, т. 32 (1925), N 4, 646-667.
[К32] A.N. Kolmogoroff. Zur Deutung der intuitionistischen Logik. Math. Z., Bd. 35 (1932), 58-65.
[К53] А. Н. Колмогоров. О понятии алгоритма. УМН, т. 8 (1953), в.4, 175-176.
[К65] А. Н. Колмогоров. Три подхода к определению понятия “количество информации”. Проблемы передачи информации, т. 1 (1965), в. 1, 3-11.
[К+58] А.Н. Колмогоров, В.А. Успенский. К определению алгоритма. УМН, т. 13 (1958), в. 4, 3-28.
[К+87] А.Н. Колмогоров, В.А. Успенский. Алгоритмы и случайность. ТВП, т. 32 (1987), в. 3, 425-455.
[К+92] А.Н. Колмогоров, С.И. Адян, А.Г. Драгалин, А.С. Кузичев, Е.Ю. Ногина, А.Л. Семенов, В.А. Успенский. Математическая логика и теория алгоритмов на механико-математическом факультете МГУ - в сб. Математика в Московском университете. М., Изд-во МГУ, 1992.
[Ко95] A. P. Kopylov. On NP-completeness in linear logic . APAL, v.75 (1995), No.1-2, c. 137-152.
[Ко97] A. P. Kopylov. The undecidability of second order linear affine logic. Logical foundations of

computer science (Yaroslavl, 1997), 156-166. LNCS, v. 1234, 1997.

[Ko01] A. P. Kopylov. Decidability of linear affine logic. Information and Computation, v. 164 (2001), No. 1, 173-198.

[Кра02] А.Г. Кравцов. Об одном семействе разрешимых модальных логик. УМН, т. 57 (2002), N 4, 179-180.

[Кра02а] A.G. Kravtsov. Polymodal logics of commuting functions. Logic Journal of the IGPL, v. 10 (2002), No. 5, 517-533.

[Кр84] В.Н. Кривцов. Об одном типе формальных систем без отрицания. ВМГУ, 1984, N 2, 27-31.

[Кр84а] В.Н. Кривцов. Погружение интуиционистской теории типов в интуиционистскую теорию типов без отрицания. ДАН, т. 277 (1984), N 3, 529-533.

[Кр84б] В.Н. Кривцов. Дедуктивные возможности интуиционистского анализа без отрицания. ДАН, т. 274 (1984), N 4, 786-790.

[Кр84в] В.Н. Кривцов. Дедуктивные возможности исчисления предикатов без отрицания. ВМГУ, 1984, N 4, 3-5.

[Кр84г] В.Н. Кривцов. Формальная система арифметики без отрицания, консервативная относительно арифметики Гейтинга. МЗ, т. 36 (1984), N 4, 583-592.

[Кр00] V. N. Krivtsov. A negationless interpretation of intuitionistic theories. Studia Logica, v. 64 (2000), No. 3, 323-344; 65 (2000), No. 2, 155-179.

[Кро76] М.Д. Кроль. К топологическим моделям интуиционистского анализа. Один контрпример. МЗ, т. 19 (1976), N 6, 859-862.

[Кро77] М.Д. Кроль. Дизъюнктивное и экзистенциальное свойство интуиционистского анализа со схемой Крипке. ДАН, т. 234 (1977), N 4, 750-753.

[Кро78] М.Д. Кроль. Различные варианты схемы Крипке в интуиционистском анализе. ДАН, т. 239 (1978), N 5, 1048-1051.

[Кро78а] M.D. Krol. A topological model for intuitionistic analysis with Kripke's scheme. ZML, Bd. 24 (1978), No. 5, 427-436.

[Кру79] В.Н. Крупский. Вполне перечислимые множества в эффективно метрических пространствах. ВМГУ, 1979, N 5, 20-25, 86.

[Кру81] В.Н. Крупский. О сложности описания вычислимых аппроксимаций для точек метрического пространства. ВМГУ, 1981, N 5, 3-9.

[Кру82] В.Н. Крупский. О совместной аппроксимируемости действительных чисел. ДАН, т. 267 (1982), N 1, 45-48.

[Кру84] В.Н. Крупский. Допустимые топологические цепи Маркова с отождествлениями. МЗ, т. 35 (1984), в. 2, 263-272.

[Кру90] В.Н. Крупский. Эффективность кодирования приближений действительных чисел. МЗ, т. 47 (1990), в. 2, 46-57.

[Кру97] V. Krupski. Operational logic of proofs with functionality condition on proof predicate. LNCS, 1997, v.1234, p. 167-177.

[Кру00] V. Krupski. The single-conclusion proof logic and inference rules. APAL, v. 113 (2002), p. 181-206.

[Ку50] А.В. Кузнецов. О примитивно рекурсивных функциях большого размаха. ДАН, т. 71 (1950), N 2, 233-236.

[Ку58] А.В. Кузнецов. Неповторяющиеся контактные схемы и неповторяющиеся суперпозиции функций алгебры логики. ТМИ 51 1958, 186-225 .

[Ку58a] А.В. Кузнецов. Одно свойство функций, реализуемых не планарными неповторяющимися сетями. ТМИ 51 1958 174-185.

[Ку63] А.В. Кузнецов. Неразрешимость общих проблем полноты, разрешимости и эквивалентности для исчислений высказываний. Алгебра и логика, т. 2 (1963), N 4, 47-66.

[Ку65] А.В. Кузнецов. Аналоги штриха Шеффера в конструктивной логике. ДАН, т. 160 (1965), 274-277.

[Куз00] R. Kuznets. On the complexity of explicit modal logics. Proceedings of CSL 2000, p. 371-383. LNCS, v. 1862, Springer, 2000.

[Куш64] Б.А. Кушнер. Об интегрировании по Риману в конструктивном анализе. ДАН, т. 156 (1964), N 2, 255-267.

[Куш65] Б.А. Кушнер. О существовании неограниченных аналитических конструктивных функций. ДАН, т. 160 (1965), N 1, 29-31.

[Куш65a] Б.А. Кушнер. К конструктивной теории интеграла Римана. ДАН, т. 165 (1965), N 6, 1238-1240.

[Куш67] Б.А. Кушнер. Некоторые свойства квазичисел и операторов из квазичисел в квазичисла. ДАН 171, N 2 (1967), 275-277.

[Куш67a] Б.А. Кушнер. Некоторые соотношения между свойствами конструктивных функций и операторов из квазичисел в квазичисла. ДАН, т. 177 (1967), N 1, 29-32.

[Куш67б] Б.А. Кушнер. О первообразных конструктивных функциях. МЗ, т.2 (1967), N 2, 157 - 166.

[Куш92] Б.А. Кушнер. А. А. Марков и Эрретт Бишоп. Вопросы истории естетсвознания и техники, 1992, N 1, 70-81.

[Куш93] Б.А. Кушнер. Конструктивная математика А.А. Маркова: некоторые размышления. Modern Logic, v. 3 (1993), N 2, 119-144.

[Л73] А.М. Левин. Некоторые применения определений истинности. ВМГУ, 1973, N 5, 11-17.

[Л75] А.М. Левин. Аксиома выбора в классическом анализе. ВМГУ, 1975, N 4, 59-65.

[Л75a] А.М. Левин. Сравнение различных форм аксиомы выбора в классическом анализе. ДАН, т. 225 (1975), N 4, 759-762.

[Л77] А.М. Левин. Консервативное расширение формального математического анализа со схемой зависимого выбора. МЗ, т. 22 (1977), N 1, 61-68.

[Л78] А.М. Левин. Об одном фрагменте классического анализа. ВМГУ, 1978, N 1, 3-9.

[Л79] А.М. Левин. Об одной интересной аксиоматической теории. В кн.: Исследования по неклассическим логикам и теории множеств. М., Наука, 1979, с. 137-143.

[Лев73] Л.А. Левин. Универсальные проблемы перебора. Проблемы передачи информации, т. 9, N 3, 265-266.

[Ло72] М.В. Ломковская. Условные грамматики и промежуточные классы языков. ДАН, т. 207

(1972). 781-784.

[Ло73] М.В. Ломковская. О грамматиках с условиями на применимость правил. В сб. : Математическая лингвистика. М., Наука, 1973, с. 130-155.

[Лы87] И.Г.Лысёнок. Доказательство теоремы М. Холла о конечности групп B(m,6). МЗ, т. 41 (1987), N 3, 422-428.

[Лы85] И.Г.Лысёнок. Множество определяющих соотношений для группы Григорчука. МЗ, т. 38 (1985), N 4, 503-516.

[Лы88] И.Г.Лысёнок. О решении квадратичных уравнений в группах с условием малого сокращения . МЗ, т. 43 (1988), N 5, с. 577-592.

[Лю68] В.А. Любецкий. Некоторые следствия гипотезы о несчетности множества конструктивных действительных чисел. ДАН, т. 182 (1968), 758-759.

[Лю70] В.А. Любецкий. Из существования неизмеримого множества типа A_2 следует существование несчетного множества типа CA, не содержащего никакого совершенного подмножества. ДАН, т. 195 (1970), 548-550.

[Лю71] В.А. Любецкий. Независимость некоторых предложений дескриптивной теории множеств от теории множеств Цермело-Френкеля. ВМГУ, т. 26 (1971), N 2, 78-82.

[Мак98] E. Makarov. Models of logic programs w.r.t. intuitionistic and minimal logics. Proceedings of the 5th Workshop on logic, language, information and computation, San Paulo, Brazil, 1998, pp. 126-131.

[ММ01] K.S. Makarychev, Yu. S. Makarychev. The importance of being formal. Mathematical Intelligencer, v. 23(1) (2001), 41-42.

[Мар47] А.А. Марков. Невозможность некоторых алгорифмов в теории ассоциативных систем. ДАН, 1947, т.57, 587-590; т. 58, 353-356; 1951, т. 77, 19-20.

[Мар51] А.А. Марков. Невозможность алгорифмов распознавания некоторых свойств в теории ассоциативных систем. ДАН , т.77 (1951), 953-956.

[Мар52] А.А. Марков. О неразрешимых алгорифмических проблемах. Мат. сборник, 1952, т. 31, 34-42.

[Мар54] А. А. Марков. О непрерывности конструктивных функций. УМН, т. 9 (1954), N 3, 226-230.

[Мар57] А. А. Марков. Об инверсионной сложности систем функций. ДАН, 1957, т. 116, N 6, 917-919.

[Мар57а] А. А. Марков. Математическая логика и численный анализ. Вестник АН СССР, т. 27 (1957), N 8, 21-25.

[Мар58] А.А. Марков. Неразрешимость проблемы гомеоморфии. ДАН, т. 121 (1958), 218-220.

[Мар58а] A.A. Markov. Zum Problem der Darstellbarkeit von Matrizen. ZML, Bd. 4 (1958), 157-168.

[Мар58б] А. А. Марков, Об однотактных диодных схемах для сложения и вычитания по модулю n. Рукопись, 1958 (готовится к печати, 2002).

[Мар62] А.А. Марков. О конструктивной математике. ТМИ, т. 67 (1962), 8-14.

[Мар62а] А.А. Марков, О минимальных контактно-вентильных двухполюсниках для монотонных симметрических функций, Проблемы кибернетики, 1962, вып. 8, стр. 117-121.

[Мар63] А.А. Марков. О некоторых алгорифмах, связанных с системами слов. ИАН, т. 27 (1963), 101-160.

[Мар63а] А.А. Марков. Об инверсионной сложности системы булевых функций. ДАН, 1963, т. 150, N 3, стр. 477-479.

[Мар64] А.А. Марков. О нормальных алгорифмах, вычисляющих булевы функции. ДАН, т. 157 (1964), 262-264.

[Мар67] А.А. Марков. О нормальных алгорифмах, связанных с вычислением булевых функций. ИАН, т. 31 (1967), 161-208.

[Мар74] А.А. Марков. Язык $Я_0$. ДАН, т. 214 (1974), 40-43.

[Мар74а] А.А. Марков. Язык $Я_1$. ДАН, т. 214 (1974), 279-282.

[Мар74б] А.А. Марков. Язык $Я_2$. ДАН, т. 214 (1974), 513-516.

[Мар74в] А.А. Марков. Язык $Я_3$. ДАН, т. 214 (1974), 765-768.

[Мар74г] А.А. Марков. Языки $Я_4$, $Я_5$, ... ДАН, т. 214 (1974), 1031-1034.

[Мар74д] А.А. Марков. Язык $Я_\omega$. ДАН, т. 214 (1974), 1262-1264; т. 215 (1974), 57-60.

[Мар74е] А.А. Марков. Полнота классического исчисления предикатов в конструктивной математической логике. ДАН, т. 215 (1974), 266-269.

[Мар76] А.А. Марков. Попытка построения логики конструктивной математики. Исследования по теории алгорифмов и математической логике, т. 2, с. 3-31. Вычислительный центр АН СССР, Москва, 1976.

[Мар77] A. A. Markov. On a semantical language hierarchy in a constructive mathematical logic. Logic, foundations of mathematics and computability theory (Proc. Fifth Internat. Congr. Logic, Methodology and Philos. of Sci., Univ. Western Ontario, London, Ont., 1975), Part I, pp. 299-306. Univ. Western Ontario Ser. Philos. Sci., Vol. 9, Reidel, Dordrecht, 1977.

[Мар+67] А.А. Марков, Н.М. Нагорный. Об одном языке для описания работы вычислительных машин. Проблемы кибернетики, в. 19 (1967), с. 5-38.

[Мар87] А. А. Марков. Что такое конструктивная математика? (с предисловием Н.М. Нагорного). Вехи развития современной математики, 209-212. М., Наука, 1987.

[Муч85] Ан.А. Мучник. Игры на бесконечных деревьях и автоматы с тупиками. Новое доказательство разрешимости монадической теории с двумя функциями следования. Семиотика и информатика, v. 24, 16-40. М., ВИНИТИ, 1985.

[Муч85а] Ан.А. Мучник. Основные структуры дескриптивной теории алгоритмов. ДАН, т. 285 (1985), N 2, 280-283.

[Муч87] Ан.А. Мучник. Нижние границы частот в вычислимых последовательностях и релятивизованная априорная вероятность. ТВП, т. 32 (1987), N 3, 563-565.

[Муч92] An. Muchnik. Games on infinite trees and automata with dead-ends. A new proof for the decidability of the monadic second order theory of two successors. Bulletin of the European Association for Theoretical Computer science, v. 48 (1992), 219-267.

[Муч+96] An. Muchnik, N.Vereschagin. A general method to construct oracles realizing given relationships between complexity classes . TCS, v. 157 (1996), 227-258.

[Муч98] An.A. Muchnik. On common information. TCS, v. 207 (1998), No. 2, 319-328.

[Муч+98] An. Muchnik, A.L. Semenov, V.A. Uspenskij. Mathematical metaphysics of randomness. TCS, v. 207 (1998), No. 2, 263-317.

[Муч+99] Ан.А. Мучник, С. Е. Посицельский. Об одном классе перечислимых множеств. УМН, т. 54 (1999), N 3, 171-172.

[Муч+01] An. Muchnik, A.Semenov, M. Ushakov. Almost periodic sequences. Submitted to TCS, 2001.

[Муч+01a] An. Muchnik, N. Vereshchagin. Logical operations and Kolmogorov complexity. II. Proc. of 16th Annual IEEE Conference on Computational Complexity, June 2001, p. 256-265. ECCC, TR01-089.

[Муч02] An. Muchnik. Conditional complexity and codes. TCS, v. 271 (2002), 97-111.

[Н60] Н.М. Нагорный. Об исследовании изоморфизмов ассоциативных исчислений. ZML, Bd. 6 (1960), 319-324.

[Н61] Н.М. Нагорный. Реализация функций на алфавитах некоторыми классами алгорифмов. ДАН, т. 140 (1961), 52-55.

[Н64] Н.М. Нагорный. О реализуемых и выполнимых логико-арифметических формулах. ДАН, т. 157 (1964), 529-531.

[Н73] Н.М. Нагорный. Отделимость относительно инвариантов. Исследования по теории алгорифмов и математической логике, т. 1, с. 205-210. Вычислительный центр АН СССР, М., 1973.

[Н74] Н.М. Нагорный. О некоторых способах описания работы взаимодействующих вычислительных машин. Теория алгорифмов и математическая логика, с. 127-142. Вычислительный центр АН СССР, М., 1974.

[Н76] Н.М. Нагорный. Один вариант определения реализации логико-арифметической формулы. Исследования по теории алгорифмов и математической логике, т. 2, с. 32-45. Вычислительный центр АН СССР, М., 1976.

[Н76a] Н.М. Нагорный. Нормальные алгоритмы и языки первого порядка. Исследования по теории алгорифмов и математической логике, т. 2, с. 46-50. Вычислительный центр АН СССР, М., 1976.

[Н94] N.M. Nagornyi. Andrei Markov and mathematical constructivism. Logic, methodology and philosophy of science, IX (Uppsala, 1991), 467-479, Stud. Logic Found. Math., 134, North-Holland, 1994.

[Н00] Н.М. Нагорный. Реализуемостная семантика раннего периода марковского конструктивизма (история и проблемы). В кн.: Логические исследования, т. 7, с. 61-71. М., Наука, 2000.

[На91] П.Г. Наумов. О модальных логиках, консервативных над интуиционистским исчислением. ВМГУ, т. 46 (1991), N 6, 58-61.

[На93] П.Г. Наумов. Неразрешимость логики доказуемости второго порядка со сравнением свидетелей. ВМГУ, т. 48 (1993), N 3, 14-17.

[Неп71] Н.Н. Непейвода. Вложения булевых алгебр в алгебру Линденбаума - Тарского. ДАН, т. 199 (1971), 23-25.

[Неп73] Н.Н. Непейвода. Новое понятие предикативной истинности и определимости. МЗ, т. 13 (1973), 735-745.

[Неп73а] Н.Н. Непейвода. Соотношение между предикативной значимостью и интуицией общности. ДАН, т. 212 (1973), 40-43.

[Неп73б] Н.Н. Непейвода. Одно обобщение иерархии Клини - Мостовского. ДАН, т. 212 (1973), 295-297.

[Неп74] Н.Н. Непейвода. Язык Δ со слабой трехзначной логикой. ДАН, т. 219 (1974), 1325-1327.

[Неп75] Н.Н. Непейвода. Язык Δ с интуиционистскими связками. ДАН, т. 220 (1975), 41-43.

[Нов43] П.С. Новиков. On the consistency of certain logical calculus. Мат. сборник, 1943, т. 12 (54), 231-261.

[Нов51] П.С. Новиков. О непротиворечивости некоторых положений дескриптивной теории множеств. ТМИ, 1951, т. 38, с. 279-316.

[Нов+58] П.С. Новиков, С.И. Адян. Проблема слов в полугруппах с одним определяющим соотношением. ZML, Bd. 4 (1958), 66-88.

[Нов+68] П.С. Новиков, С.И. Адян. О бесконечных периодических группах. ИАН, т.32 (1968), N 1,2,3, с. 212-244, 251-524, 709-731.

[Нов+68а] П.С. Новиков, С.И. Адян. Коммутативные подгруппы и проблема сопряженности в свободных периодических группах нечетного порядка. ИАН, т. 32 (1968), 1176-1190.

[Но66] Е.Ю. Ногина. Об эффективных топологических пространствах. ДАН, т.169 (1966), N 1, pp.28-31.

[Но66а] Е.Ю.Ногина. Эффективные топологические пространства. ДАН, т. 169 (1966), 28-31.

[Но69] Е.Ю. Ногина. Соотношения между некоторыми классами эффективных топологических пространств. МЗ, т. 5 (1969), 483-495.

[Но+74] Ю.Р. Вайнберг, Е.Ю. Ногина. Категории эффективных топологических пространств. Исследования по формализованным языкам и неклассическим логикам, с. 253-273. М., Наука, 1974.

[Но+76] Ю.Р. Вайнберг, Е.Ю. Ногина. Два типа непрерывности вычислимых отображений нумерованных топологических пространств. Исследования по теории алгоритмов и математической логике, II, с. 84-99. Вычислительный центр АН СССР. М., 1976.

[Но78] Е.Ю. Ногина. Нумерованные топологические пространства. ZML, Bd. 24 (1978), No. 2, 141-176.

[Но78а] Е.Ю. Ногина. О вполне перечислимых подмножествах прямых произведений нумерованных множеств. Математическая лингвистика и теория рекурсии, 130-132, 1978.

[Но81] Е.Ю. Ногина. Соотношение между отделимостью и трассируемостью множеств. Математическая логика и математическая лингвистика, с. 135-144. Калининский гос. университет, 1981.

[Но86] Е.Ю. Ногина. Степени неразрешимости расширений логики GL. Логические методы построения эффективных алгоритмов, с. 90-92. Калининский гос. университет, 1986.

[Но90] Е. Ю. Ногина. О классах арифметических напарников модальных логик доказуемости. ВМГУ, 1990, N 1, с. 31-33.

[Но96] Е.Ю. Ногина. Логика Гжегорчика с операторами арифметических доказательств. ФПМ, т. 2 (1996), N 2, с. 483-499.

[Ож83] Ю.И. Ожигов. Уравнения с двумя неизвестными в свободной группе. ДАН, т. 268 (1983), N 4, 809-813.

[Ос68] В.А. Осипова. О проблеме тождества для конечно определенных полугрупп. ДАН, т. 178 (1968), 1017-1020.

[Ос71] В.А. Осипова. Алгоритмические проблемы в полугруппах с ограниченной мерой налегания определяющих слов. Кандидатская диссертация. М., МИАН, 1971.

[П71] Р.Д. Павлов. О проблеме распознавания групповых свойств. МЗ, т. 10 (1971), 169-180.

[Па00] М.В. Патласов. Пропозициональные формулы, замкнутые в минимальном исчислении. ФПМ, т. 6 (2000), в. 4, с. 1155-1191.

[Пе93] M. Pentus. Lambek grammars are context free. Eighth Annual IEEE Symposium on Logic in Computer Science (Montreal, PQ, 1993), 429-433. IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 1993.

[Пе94] M.R. Pentus. The conjoinability relation in Lambek calculus and linear logic . Journal of Logic, Language and Information, v. 3 (1994), No. 2, 121-140.

[Пе95] M. Pentus. Models for the Lambek calculus. APAL, v. 75 (1995), No.1-2, 179-213.

[Пе95а] М.Р. Пентус. Исчисление Ламбека и формальные грамматики. ФПМ, т.1 (1995), N 3, с. 729-751.

[Пе96] М.Р. Пентус. Исчисление Ламбека и формальные грамматики. Кандидатская диссертация. М., МГУ, 1996.

[Пе97] M. Pentus. Equivalence of multiplicative fragments of cyclic linear logic and noncommutative linear logic. In: Logical foundations of computer science (Yaroslavl, 1997), 306-311. LNCS, v. 1234. Springer, 1997.

[Пе97а] M. Pentus. Product-free Lambek calculus and context-free grammars. JSL, v.62 (1997), No. 2, 648-660.

[Пе98] M. Pentus. Free monoid completeness of the Lambek calculus allowing empty premises. In: Logic Colloquium '96, 171-209. Lecture Notes Logic, v. 12, Springer, 1998.

[Пе98а] M. Pentus. Lambek calculus and formal languages. In: Logic Colloquium '95 (Haifa), 269-272. Lecture Notes Logic, 11, Springer, 1998.

[Пе99] М.Р. Пентус. Полнота синтаксического исчисления Ламбека. ФПМ, т. 5 (1999), N 1, 193-219.

[Пе00] М.Р. Пентус. Атомные теории семейств полугрупп с делением. ФПМ, т. 6 (2000), N 2, 627-632.

[Пе00а] М.Р. Пентус. Полнота исчисления Ламбека. Докторская диссертация. М., МГУ, 2000.

[Пе+00] А.Е. Пентус, М.Р. Пентус. Объектно-ориентированное представление иерархических сетей Петри. ФПМ, т. 6 (2000), N 3, 831-840.

[Пет+68] Х.Д. Икрамов, Н.В. Петри. Экстремальные свойства некоторых матричных норм. Журнал вычислительной математики и физики, т. 8 (1969), 987-995.

[Пет69] Н.В. Петри. Сложность реализации функций алгебры логики контактными схемами при условии высокой надежности. Проблемы кибернетики, N 21 (1969), 865-871.

[Пет69а] Н.В. Петри. Две теоремы о сложности алгоритмов и вычислений. Записки научных семинаров ЛОМИ, т. 16 (1969), 165-174.

[Пет69б] Н.В. Петри. Сложность алгоритмов и их время работы. ДАН, т. 186 (1969), 30-31.

[Пет69в] Н.В. Петри. Алгоритмы, связанные с предикатами и булевыми функциями. ДАН, т. 185 (1969), 37-39.

[Пет+69] Х.Д. Икрамов, Н.В. Петри. Согласование векторной и матричной норм. Журнал вычислительной математики и физики, т. 9 (1969), 987-995.

[Пет+69а] М.И. Канович, Н.В. Петри. Некоторые теоремы о сложности нормальных алгорифмов и вычислений. ДАН, т. 184 (1969), 1275-1276.

[Пет+69б] Х.Д. Икрамов, Н.В. Петри. Согласование векторной и матричной норм. Журнал вычислительной математики и физики, т. 9 (1969), 987-995.

[Пет74] Н.В. Петри. Эффективная неперечислимость псевдочисел. Теория алгорифмов и математическая логика, с. 143-147. Вычислительный центр АН СССР, М., 1974.

[Пл73] В.Е. Плиско. О реализуемых предикатных формулах. ДАН, т. 212 (1973), N 3, 553-556.

[Пл74] В.Е. Плиско. Об одной формальной системе, связанной с реализуемостью. Теория алгорифмов и математическая логика. ВЦ АН СССР, М., 1974, с. 148-158.

[Пл74а] В.Е. Плиско. Рекурсивная реализуемость и конструктивная логика предикатов. ДАН, т. 214 (1974), N 3, с. 520-523.

[Пл76] В.Е. Плиско. Некоторые варианты понятия реализуемости для предикатных формул. ДАН, т. 226 (1976), N 1, с. 61-64.

[Пл77] В.Е. Плиско. Неарифметичность класса реализуемых предикатных формул. ИАН, т. 41 (1977), N 3, с. 483-502.

[Пл78] В.Е. Плиско. Некоторые варианты понятия реализуемости для предикатных формул. ИАН, т. 42 (1978), N 3, с. 636-653.

[Пл83] В.Е. Плиско. Абсолютная реализуемость предикатных формул. ИАН, т. 47 (1983), N 2, с. 315-334.

[Пл+85] В.Е. Плиско, В.А.Успенский. Интуиционистская логика. В кн.: А.Н. Колмогоров, Избранные труды, Математика и механика, М., 1985, с. 394-404.

[Пл86] V.E. Plisko. The problems of semantic construction of constructive logic. In: Algebra, Combinatorics and Logic in Computer Science. Vol. II (Colloq. mat., 42), 1986, p. 661-666.

[Пл87] В.Е. Плиско. О языках с конструктивными логическими связками. ДАН, т. 296 (1987), N 1, с. 35-38.

[Пл88] В.Е. Плиско. Исчисление Колмогорова как фрагмент минимального исчисления. УМН, 1988, т. 43, N 1, с. 79-91.

[Пл90] В.Е. Плиско. Конструктивная формализация теоремы Тенненбаума и ее применения. МЗ, т. 48 (1990), N 3, с. 108-118.

[Пл92] В.Е. Плиско. Об арифметической сложности некоторых конструктивных логик . Мат. заметки, т. 52 (1992), N 1, с. 94-104.

[Пл92а] В.Е. Плиско. О понятии относительной равномерной реализуемости пропозициональных формул. ВМГУ, 1992, N 2, с. 77-79.

[Пл93] В.Е. Плиско. О логиках, имеющих диагностические формулы относительно минимального исчисления. ВМГУ, 1993, N 6, с. 16-22.

[Пл95] В.Е. Плиско. Конструктивные семантики, основанные на геделевской интерпретации арифметических суждений. Актуальные проблемы современной математики. Т.1. Новосибирск, 1995, с.114-120.

[Пл97] V. Plisko. Two semantics and logics based on the Gödel interpretation. In: Computational logic and proof theory. G. Gottlob, A. Leitsch, D. Mundici, eds. LNCS, v. 1289, p. 233-240. Springer, 1997.

[Пл97a] В.Е. Плиско. Модифицированная реализуемость и логика предикатов. МЗ, т. 61 (1997), N 2, 259-269.

[Пл99] В.Е. Плиско. Об арифметической полноте предикатных логик полных конструктивных арифметических теорий. ФПМ, т. 5 (1999), N 1, 221-255.

[Р85] А.А. Разборов. Нижние границы монотонной сложности некоторых булевых функций. ДАН, т. 281 (1985), 798- 801.

[Р85a] А.А. Разборов. Нижние границы монотонной сложности логического перманента. МЗ, т. 37 (1985), 887-900.

[Р86] A.A. Razborov. Lower bounds for the monotone complexity of Boolean functions. Proc. of the Internat. Congress of Math., Berkeley, CA, 1986, pp. 1478-1487.

[Р87] А.А. Разборов. Нижние границы размера схем ограниченной глубины в полном базисе, содержащем функций логического сложения. МЗ, т. 41 (1987), 598-607.

[Р89] A.A. Razborov. On the method of approximations. Proc. 21st Annual ACM Symp. on Theory of Computing, 1989, pp. 167-176.

[Р01] А.А. Разборов. P=?NP или проблема перебора: взгляд из 90-х. http://genesis.mi.ras.ru/~razborov/

[Р01a] А.А. Разборов. Краткий комментарий к работам А.А. Маркова по сложности булевых функций. http://genesis.mi.ras.ru/~razborov/

[Рас87] A.L. Rastsvetaev. About recognizability of some properties of monadic schemas of programs with commutative functions. Proc. 8th Int. Congr. Log. Methodol. and Phil. of Sci., v.5, p.1. Moscow, 1987, p. 161-162.

[Рас89] A. L. Rastsvetaev. On monadic logic of recursive programs with parameters. Bull. Sect. Logic Polish Acad. Sci., v. 18 (1989), No. 2, 57-62.

[Рас90] А.Л. Расцветаев. Пропозициональная логика булевых рекурсивных программ с предикатными переменными в посылках. МЗ, т. 48 (1990), N 3, 119-127.

[Ро77] М.А. Ройтберг. Эквивалентность сетей с единственной обратной связью. Проблемы передачи информации, т. 13 (1977), N 2, 83-89.

[Ро77a] M. Roytberg. The equivalence of schemata with some feedbacks. Fundamentals of computation theory (Proceedings of International Conference, Poznan-Kórnik, 1977), pp. 166-170. LNCS, v. 56. Springer, 1977.

[Ро78] М.А. Ройтберг. Цепи автоматов и реализуемые ими отображения. Автоматика и телемеханика, 1978, N 4, 151-160.

[Ром+00] D. Hammer, A. Romashchenko, A. Shen, N. Vereshchagin. Inequalities for Shannon entropy and Kolmogorov complexity. Journal of Computer and Systems Sciences, v. 60 (2000), No. 2, p. 442-464.

[Ром+02] A.Romashchenko, A. Shen, N. Vereshchagin. Combinatorial interpretation of Kolmogorov complexity. TCS, v. 271 (2002), 111-123.

[Ром00] А.Е. Ромащенко. Пары слов с нематериализуемой общей информацией. Проблемы передачи информации, т. 36 (2000), в. 1, с. 3-20.

[Ром00а] А.Е. Ромащенко. Полурешетка последовательности слов с отношением условной простоты. ВМГУ, 2000, N 1, с. 32-39.

[С96] А.Г. Савушкина. О группе сопрягающих автоморфизмов свободной группы. МЗ, т.60 (1996), N 1, 92-108.

[С96а] А.Г. Савушкина. Центр группы крашеных кос. ВМГУ, 1996, N 1, 32-36.

[С96б] А.Г. Савушкина. Сопрягающие базис автоморфизмы свободной группы. ВМГУ, 1996, N 4, 17-21.

[Сем73] А.Л. Семенов. Алгоритмические проблемы для степенных рядов и для контекстно-свободных грамматик. ДАН, т. 212 (1973), 50-52.

[Сем74] А.Л. Семенов. Регулярность k-линейных языков для различных k. ДАН, т. 215 (1974), 278-281.

[Сем77] А.Л. Семенов. Пресбургеров характер регулярных предикатов в двух числовых системах. Сибирский мат. журнал, т. 18 (1977), N 2, 403-418.

[Сем78] А.Л. Семенов. Некоторые алгоритмические проблемы для систем алгоритмических алгебр. ДАН, т. 239 (1978), N 5, 1063-1066.

[Сем79] А.Л. Семенов. Некоторые расширения арифметики сложения натуральных чисел. ИАН, т. 43 (1979), N 5, 1175-1195.

[Сем80] А.Л. Семенов. Интерпретация свободных алгебр в свободных группах. ДАН, т. 252 (1980), N 6, 1329-1332.

[Сем82] А.Л. Семенов. Об определимости арифметики в ее фрагментах. ДАН, т. 263 (1982), N 1, 44-47.

[Сем83] А.Л. Семенов. Логические теории одноместных функций на натуральном ряду. ДАН, т. 47 (1983), N 3, 623-658.

[Сем84] A. L. Semenov. Decidability of monadic theories. In: Mathematical foundations of computer science, 1984 (Prague, 1984), 162-175. LNCS, v. 176 (1984).

[Сем73] А.Л. Семенов. Разрешающие процедуры для логических теорий. Кибернетика и компьютерная технология, N 2, 134-146, М., Наука, 1986.

[Сем88] A.L. Semenov. A simple detailed proof for Gödel's incompleteness theorem. Kybernetika (Prague) 24 (1988), No. 6, 447-451.

[Сем+86] А.Л. Семенов, В.А. Успенский. Математическая логика в информатике и программировании. Вестник АН СССР, 1986, N 7, 93-103.

[Ск76] Д.П. Скворцов. Вхождение импликации в финитно общезначимые недоказуемые формулы логики высказываний. МЗ, т. 20 (1976), N 3, 383-390.

[Ск+79] Л.Л. Максимова, Д.П. Скворцов, В.Б. Шехтман. Невозможность конечной аксиоматизации логики финитных задач Медведева. ДАН, т. 245 (1979), N 5, 1051-1054.

[Ск79] Д.П. Скворцов. Логика бесконечных задач и модели Крипке на атомных полурешетках множеств. ДАН, т. 245 (1979), N 4, 798-801.

[Ск79а] Д.П. Скворцов. Реализуемость и финитная общезначимость пропозиционнальных формул с ограничениями на вхождения знака импликации. МЗ, т. 25 (1979), N 6, 919-931.

[Ск79б] Д.П. Скворцов. Некоторые пропозициональные логики, связанные с понятием типов информации Ю.Т. Медведева. Семиотика и информатика, в. 13, с. 142-149. М., ВИНИТИ, 1979.

[Ск79в] Д.П. Скворцов. Два обобщения понятия финитной задачи. Исследования по неклассическим логикам и теории множеств. М., Наука, 1979, 201-239.

[Ск80] Д.П. Скворцов. Связь финитной общезначимости некоторых пропозициональных формул с выводимостью в системе Крайзеля - Патнема. ВМГУ, 1980, N 3, 29-32.

[Ск83] Д.П. Скворцов. Об интуиционистском исчислении высказываний с дополнительной связкой. Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М., Наука, 1983, с. 154-172.

[Ск+93] D. Skvortsov, V. Shehtman. Maximal Kripke-type semantics for modal and superintuitionistic predicate logics. APAL, 1993, v.63, No.1, p.69-101.

[Со77] С.К. Соболев. Об интуиционистском исчислении высказываний с кванторами. МЗ, т. 22 (1977), 69-76.

[Со77а] С.К. Соболев. Конечномерные суперинтуиционистские логики. ИАН, т. 41 (1977), N 5, 963-986, 1199.

[Со77б] С.К. Соболев. О финитной аппроксимируемости суперинтуиционистских логик. Мат. сборник (новая серия), 102(144) (1977), N 2, 289-301.

[С74] С.Ф. Сопрунов. Мощность вещественно замкнутого поля. ВМГУ, т. 29 (1974), N 4, 70-73.

[С75] С.Ф. Сопрунов. Сильные нестандартные модели арифметики. ДАН, т. 220 (1975), 293-296.

[С75а] С.Ф. Сопрунов. Начальные отрезки нестандартных арифметик. ДАН, т. 223 (1975), N 3, 576-577.

[С76] С.Ф. Сопрунов. Сяетные нестандартные модели арифметики. Исследования по теории множеств и неклассическим логикам. М., Наука, 1976, 157-173.

[С79] С.Ф. Сопрунов. Решетки нестандартных арифметик. Исследования по неклассическим логикам и теории множеств. М., Наука, 1979, 146-172.

[Т80] А.А. Тверской. Последовательность комбинаторных суждений, независимых от арифметики Пеано. ВМГУ, 1980, N 5, 7-13.

[Т82] А.А. Тверской. Исследование рекурсивности и арифметичности сигнатурных функций в нестандартных моделях арифметики. ДАН, т. 262 (1982), N 6, 1325-1328.

[Т84] А.А. Тверской. Конструктивизируемость формальных арифметических структур. Алгебра и дискретная математика, 134-136, Латв. гос. унив., Рига, 1984.

[Т85] А.А. Тверской. Конструктивизируемые и неконструктивизируемые формальные арифметические структуры. УМН, т. 40 (1985), N 6, 159-160.

[Т87] А.А. Тверской. Неконструктивизируемые модели формальной арифметики. ИАН, т. 51 (1987), N 1, 111-130.

[У49] В.А. Успенский. Геометрический вывод основных свойств гармонических функций. УМН, т. 4, (1949). N 2, 201-205.
[У53] В.А. Успенский. Теорема Гёделя и теория алгоритмов. ДАН, т. 91 (1953), N 4, 737-740.
[У55] В.А. Успенский. О вычислимых операциях. ДАН, т. 103 (1955), N 5, 773-776.
[У55а] В.А. Успенский. Системы перечислимых множеств и их нумерации. ДАН, т. 105 (1955), N 6, 1155-1158.
[У56] В.А. Успенский. Вычислимые операции и понятие программы. УМН, т. 11 (1956), v. 4, 172-176.
[У57] В.А. Успенский. К теореме о равномерной непрерывности. УМН, т. 12 (1957), в. 1, 99-142.
[У57а] В.А. Успенский. Несколько замечаний о перечислимых множествах. ZML, Bd. 3 (1957), No. 22, 157-170.
[У59] В.А. Успенский. О проблеме построения машинного языка для информационных машин. Проблемы кибернетики, т. 2 (1959), 39-50.
[У60] В.А. Успенский. К вопросу о соотношении между различными системами конструктивных действительных чисел. ИВУЗ, 1960, N 2, 199-208.
[У69] В.А. Успенский. О сводимости вычислимых и потенциально вычислимых нумераций. МЗ, т. 6 (1969), 3-9.
[У74] В.А. Успенский. Теорема Гёделя о неполноте в элементарном изложении. УМН, т. 29 (1974), N 1, 3-47.
[У77] В.А. Успенский. Алгоритм. Математическая энциклопедия, т. 1. М., Советская Энциклопедия, 1977, 202-206.
[У77а] В.А. Успенский. Алгоритмов теория. Математическая энциклопедия, т. 1. М., Советская Энциклопедия, 1977, 226-229.
[У85] В.А. Успенский. Вклад Н.Н. Лузина в дескриптивную теорию множеств: понятия, проблемы, предсказания. УМН, т. 40 (1985), N 3, 85-116.
[У92] V.A Uspensky. Kolmogorov and mathematical logic . JSL, v. 57 (1992) , Íî. 2, 385-412.
[У92а] V.A Uspensky. Complexity and entropy . In: Watanabe (ed.), Kolmogorov complexity and computational complexity, Springer-Verlag, 1992, pp. 85-102.
[У93] В.А. Успенский. Колмогоров, каким я его помню В кн.: Колмогоров в воспоминаниях, 280-384. Физматлит, М., 1993.
[У94] V.A. Uspensky. Gödel's incompleteness theorem. TCS, 1994, v. 130, Ho. 2, 239-319.
[У96] V.A. Uspensky. Kolmogorov complexity: recent research in Moscow. LNCS, v. 1113 (1996), 156-166.
[У96а] В.А.Успенский. Как теория чисел помогает криптографии. Соросовский образовательный журнал, 1996, N 6, с. 122-127.
[У97] V.A. Uspensky. Mathematical logic in the former Soviet Union: brief history and current trends. In: Logic and Scientific Methods. M. L. Dalla Chiara et al.(editors). Kluwer Academic Publishers, 1997, pp.457-483.
[У00] В.А. Успенский. Арифметика вычетов и криптография. Современное естествознание: Энциклопедия, т. 3. Математика. Механика. М., Флинта, Наука, 2000, с. 27-32.

[У01] V. A. Uspensky. Why Kolmogorov complexity? In: Complex systems, E. Goles and C. Martinez, eds. Kluwer Ac. Publishers, 2001, pp. 201-260.

[У+83] В.А. Успенский, В.Г. Кановей. Проблемы Лузина о конституантах и их судьба. ВМГУ, 1983, N 6, 73-87.

[У+81] V. A. Uspensky, A. L. Semenov. What are the gains of the theory of algorithms: basic developments connected with the concept of algorithm and with its application in mathematics. Algorithms in modern mathematics and computer science (Urgench, 1979), pp. 100-234. LNCS, v. 122, Springer, 1981.

[У+87] В. А. Успенский, А. Л. Семенов. Алгоритмы, или машины Колмогорова. В кн.: А.Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. М., Наука, 1987, с. 279-289.

[У+88] В.А. Успенский, В.Г. Кановей. Вклад М.Я. Суслина в теоретико-множественную математику. ВМГУ, 1988, N 5, с. 22-30.

[У+90] В.А. Успенский, А.Л. Семенов, А.Х. Шень, Может ли индивидуальная последовательность нулей и единиц быть случайной? УМН, т. 45 (1990), v. 1, 105-162.

[У+91] В.А. Успенский, В.Е. Плиско. Диагностические пропозициональные формулы. ВМГУ, 1994, N3, с. 8-12.

[У+94] В.А. Успенский, В.Е. Плиско. Диагностические пропозициональные формулы. Фундаментальные проблемы математики и механики. Математика. М.: Изд-во МГУ, 1994, с. 283-285.

[У+96] V.Uspensky, A. Shen. Relations between varieties of Kolmogorov complexities. Mathematical Systems Theory, 1996, vol.29, No. 3, pp. 271-292.

[Ф84] А.В. Фекличев. Схемы программ с магазинной памятью и маркерами и их разрешимые свойства. ИАН, 48 (1984), N 5, 1060-1077.

[Х80] В.Х. Хаханян. Непротиворечивость интуиционистской теории множеств с тезисом Черча и принципом униформизации. ВМГУ, 1980, N 5, 3-7.

[Х80а] В.Х. Хаханян. Сравнительная сила вариантов тезиса Черча на уровне теории множеств. ДАН, т. 252 (1980), N 5, 1070-1074.

[Х80б] В.Х. Хаханян. Совместимость интуиционистской теории множеств с формальным математическим анализом. ДАН, т. 253 (1980), N 1, 48-52.

[Х81] V. H. Hahanyan. The consistency of some intuitionistic and constructive principles with a set theory. Studia Logica, v. 40 (1981), N 3, 237-248.

[Х83] В.Х. Хаханян. Теория множеств и тезис Черча. В кн.: Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М., Наука, 1983, с. 198-208.

[Х88] В.Х. Хаханян. Невыводимость принципа униформизации из тезиса Черча в интуиционистской теории множеств . МЗ, 1988, т.43, N 5, с. 685-691.

[Ч+02] A. Chernov, An. Muchnik, A. Romashchenko, A. Shen, and N. Vereshchagin. Upper semi-lattice of binary strings with the relation “*x* is simple conditional to *y*”. TCS, v. 271 (2002), 69-95.

[Ша88] В.И. Шавруков. Логика относительной интерпретируемости над арифметикой Пеано. Препринт МИАН им. Стеклова N 5; М., 1988.

[Ша94] V. Shavrukov. A smart child of Peano's. Notre Dame Journal of Formal Logic, v. 35 (1994), 161-185.

[Шап+02] I. Shapirovsky, V. Shehtman. Chronolological future modality in Minkowski spacetime. Advances in Modal Logic 2002, pp.

[Шв79] Г. Ф. Шварц. О некоторых расширениях интуиционистской теории типов. ВМГУ, 1979, N 3, 31-34.

[Шв80] Г. Ф. Шварц. Экзистенциальное свойство с параметрами для некоторых расширений интуиционистской теории типов. ДАН, т.251 (1980), N 3, 562-565.

[Шв83] Г. Ф. Шварц. Свойства эффективности логических связок в интуиционистской теории типов. В кн.: Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М., Наука, 1983, с. 173-198.

[Ш79] А.Х. Шень. Метод приоритета и проблемы отделения. ДАН, т. 248, (1979), N 6, 1309-1313.

[Ш80] А.Х. Шень. Аксиоматический подход к теории алгоритмов и относительная вычислимость. ВМГУ, 1980, N 2, с. 27-29.

[Ш81] А.Х. Шень. Несколько замечаний о нумерациях, не являющихся натуральными. Математическая логика и математическая лингвистика. Калинин, 1981, с. 162-165.

[Ш81a] А.Х. Шень. Частотный подход к определению понятия случайной последовательности. Семиотика и информатика, вып. 18. М., ВИНИТИ, 1981, с. 14 - 42.

[Ш83] А. Шень. Понятие (α,β)-стохастичности по Колмогорову и его свойства. ДАН, т. 271 (1983), N 6, 1337-1340.

[Ш84] А. Шень. Алгоритмические варианты понятия энтропии. ДАН, т. 276 (1984), N 3, 563-566.

[Ш87] А. Шень. Вероятностные стратегии в конечных играх с полной информацией. ТВП, т. 32 (1987), N 3, 567-569.

[Ш88] А.Х. Шень. О соотношениях между различными алгоритмическими определениями случайности. ДАН, 1988, т. 302, N 3, с. 548-552.

[Ш88a] А.Х. Шень. Информатика в IX классе . Информатика и образование, 1987, N 4, с. 20-30; N 5, с. 24-31; N 6, с. 17-27; 1988, N 1, с. 8-15.

[Ш92] А. Шень. Алгоритмическая сложность и случайность: последние достижения. ТВП, т. 37 (1992), N 1, 124-131.

[Ш+92] A. Shen. IP = PSPACE: simplified proof. J. Assoc. Comput. Mach. 39 (1992), No. 4, 878-880.

[Ш+94] K. Friedl, Z. Hatsagi, A. Shen. Low-degree tests. Proceedings of the Fifth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (Arlington, VA, 1994), 57-64, ACM, New York, 1994.

[Ш97] A. Shen. Three-dimensional solutions for two-dimensional problems. Math. Intelligencer 19 (1997), No. 3, 44-47.

[Ш98] A. Shen. Probabilistic proofs. Math. Intelligencer 20 (1998), No. 3, 29-31.

[Ш+98] D. Hammer, A. Shen. A strange application of Kolmogorov complexity. Theory Comput. Syst. 31 (1998), No. 1, 1-4.

[Ш+99] B. Durand, A. Shen, N. Vereshagin. Descriptive complexity of computable sequences. STACS 99 (Trier), 153-162, LNCS, v.1563, Springer, 1999.

[Ш+01] B. Durand, A. Shen, N. Vereshagin. Descriptive complexity of computable sequences. TCS, v.

171 (2001), 47-58.
[Ш+02] A. Shen, N. Vereshchagin. Logical operations and Kolmogorov complexity. To appear in TCS, 2002.
[Ше77] В.Б. Шехтман. О неполных логиках высказываний. ДАН, т. 235 (1977), N 3, 542-545.
[Ше78] В.Б. Шехтман. Лестницы Ригера - Нишимуры. ДАН, т. 241 (1978), N 6, 1288-1291.
[Ше78а] В.Б. Шехтман. Неразрешимое суперинтуиционистское исчисление высказываний. ДАН, т.240 (1978) , N 3, 549-552.
[Ше78б] В.Б. Шехтман. Двумерные модальные логики. МЗ, т.23 (1978), в.5, с. 759-772.
[Ше80] В.Б. Шехтман. Топологические модели пропозициональных логик. Семиотика и информатика, 1980, в. 15, 74-98.
[Ше82] В.Б. Шехтман. Неразрешимые исчисления высказываний. Вопросы кибернетики. Неклассические логики и их приложения. М., 1982, с. 74-116.
[Ше83] В.Б. Шехтман. О счетной аппроксимируемости суперинтуиционистских и модальных логик. Исследования по неклассическим логикам и формальным системам. М., Наука, 1983, с. 287-299.
[Ше83а] V. Shehtman. Modal logics of domains on the real plane. Studia Logica, v. 42 (1983), No. 1, p. 63-80.
[Ше+86] V. Shehtman, D. Skvortsov. Logics of some Kripke frames connected with Medvedev notion of informational types. Studia Logica, v. 45 (1986) , 101-118.
[Ше90] V. Shehtman. Derived sets in Euclidean spaces and modal logic. ITLI Prepublication Series, X-90-05, University of Amsterdam.
[Ше+90] V. Shehtman, D. Skvortsov. Semantics of non-classical first order predicate logics. Mathematical Logic. Proceedings of Summer School and Conference on Mathematical Logic held Sept. 13-23 in Chaika, Bulgaria. Plenum Press, 1990, p.105-116.
[Ше93] V. Shehtman. A logic with progressive tenses. Diamonds and Defaults: Studies in Pure and Applied Intensional Logic. Ed. by M. De Rijke. Kluwer Academic Publishers, 1993, p. 255-285
[Ше+93] D. Gabbay, V. Shehtman. Undecidability of modal and intermediate first-order logics with two individual variables. JSL, v.58 (1993), No. 3, 800-823.
[Ше98] V. Shehtman. On strong neighbourhood completeness of modal and intermediate propositional logics (Part I). Advances in Modal Logic-96. M.Kracht, M. De Rijke, H. Wansing and M.Zakharyaschev, eds. CSLI Publications, 1998, pp. 209-222.
[Ше+98] D. Gabbay, V.Shehtman. Products of modal logics, part I. Logic Journal of the IGPL, v. 6 (1998), No.1, 73-146.
[Ше99] V.Shehtman. "Everywhere" and "here". Journal of Applied Non-Classical Logics, v. 9 (1999), No. 2-3, pp. 369-380.
[Ше99а] V.Shehtman. On strong neighbourhood completeness of modal and intermediate propositional logics (Part II). JFAK. Essays dedicated to Johan Van Benthem on the occasion of his 50th birthday. Edited by J. Gerbrandy, M. Marx, M. De Rijke, and Y. Venema. Vossiuspers, Amsterdam University Press, 1999 (CD).
[Ше+00] D. Gabbay, V. Shehtman. Products of modal logics, part 2: Relativised quantifiers in classical

logic. Logic Journal of the IGPL, v. 8 (2000), pp. 165-210.

[Ше00] В.Б. Шехтман. Модальные логики топологических пространств. Докторская диссертация. М., 2000.

[Я96] Р.Э. Яворский. Системы аксиом и модели для теорий первого порядка с оператором доказуемости. ВМГУ, 1996, N 1, 12-16

[Я97] R.E. Yavorsky. Logical schemes for first order theories. Logical foundations of computer science (Yaroslavl, 1997), 410-418. LNCS, v. 1234, Springer, 1997.

[Я98] Р.Э. Яворский. Предикатные логики разрешимых фрагментов арифметики. ВМГУ, 1998, N 2, 12-16.

[Я98а] Р.Э. Яворский. Разрешимые логики первого порядка. ФПМ, т. 4 (1998), N 2, 733-749.

[Я99] Р.Э. Яворский. Предикатные логики выразительно сильных теорий. МЗ, т. 66 (1999), N 5, 777-788.

[Я00] R. Yavorsky. On the logic of the standard proof predicate. CSL 2000: 527-541.

[Яв94] T. Sidon. Craig interpolation property in modal logics with provability interpretation. In: Logical foundations of computer science (St. Petersburg, 1994), 329-340. LNCS, v. 813, Springer, 1994.

[Яв97] T.L. Sidon. Логика доказуемости с операциями над доказательствами ФПМ, т. 3 (1997), N 4, 1173-1197.

[Яв98] Т.Л. Сидон. Интерполяционное свойство Крейга для операторных логик доказательств. ВМГУ, 1998, N 2, 34-38.

[Яв98а] Т.Л. Сидон. Неаксиоматизируемость предикатных логик доказательств. ВМГУ, 1998, N 6, 18-22.

[Як81] А.М. Якубович. О непротиворечивости теории типов с аксиомой выбора относительно теории типов. ДАН, т. 261 (1981), N 4, 825-828.

[Як81а] А.М. Якубович. Варианты аксиомы выбора в простой теории типов. МЗ, т. 30 (1981), v. 2, 269-276.

[Яш82] А.Д. Яшин. Интуиционистская логика предикатов со связкой "завтра". ВМГУ, 1982, N 4, 19-22.

[Яш84] А.Д. Яшин. Интуиционистские логические связки на линейных структурах. МЗ, т.35 (1984), в. 5, 663-675.

[Яш84а] А.Д. Яшин. Полнота интуиционистского исчисления предикатов с понятием запирания. ВМГУ, 1984, N 4, 67-69.

[Яш84б] А.Д. Яшин. Формулы Нишимуры как одноместные логические связки в элементарной теории моделей Крипке. ВМГУ, 1984, N 5, 12-15.

[Яш85] А.Д. Яшин. Семантическая характеризация интуиционистских логических связок. МЗ, т. 38 (1985), в. 1, 157-167.

[Яш86] А.Д. Яшин. Семантическая характеризация модальных логических связок. МЗ, т. 40 (1986), в. 4, 519-526.

[Яш89] А. Д. Яшин. Семантическая характеризация некоторых семейств интуиционистских логических связок. МЗ, т. 45 (1989), в. 5, 103-113,

[Яш94] А. Д. Яшин. Логика Сметанича и два определения новой интуиционистской связки. МЗ, т. 56 (1994), в. 1, 135-142.

[Яш96] А. Д. Яшин. О полноте новой интуиционистской связки. МЗ, т. 60 (1996), в. 3, 423-433.

[Яш96а] А.Д. Яшин. Новая регулярная константа в интуиционистской логике высказываний. Сибирский мат. журнал, т. 37 (1996), N 6, 1413-1432.

[Яш96б] A. Yashin. On Novikov's approach to the notion of a new intuitionistic connective: two negative examples. Bull. Sect. Logic, v. 25 (1996), No. 2, 84-88.

[Яш97] А.Д. Яшин. О количестве новых логических констант в интуиционистском исчислении высказываний. ВМГУ, 1997, N 1, 7-10.

[Яш97а] A.D. Yashin. New intuitionistic logical constants: undecidability of the conservativeness problem. Computer Science Logic (Utrecht, 1996). LNCS, v. 1258 (1997), 460-471.

[Яш97б] А. Д. Яшин. Континуальность семейства полных по Новикову логик с новой одноместной связкой. ВМГУ, 1997, N 3, 22-25.

[Яш98] А. Д. Яшин. О расширении логики Габбая. Сибирский мат. журнал, т. 39 (1998), N 1, 224-235.

[Яш98а] A. D. Yashin. New solutions to Novikov's problem for intuitionistic connectives. Journal of Logic Comput., v. 8 (1998), No. 5, 637-664.

[Яш98б] А. Д. Яшин. Модифицированная окрестностная семантика для логики Каминского. ВМГУ, 1998, N 2, 8-11.

[Яш99] A.D. Yashin. Irreflexive modality in the intuitionistic propositional logic and Novikov completeness. J. Philos. Logic, v. 28 (1999), No. 2, 175-197.

[Яш99а] A.Yashin. New intuitionistic logical constants and Novikov completeness. Studia Logica, v. 63 (1999), No. 2, 151-180.

[Яш99б] А. Д. Яшин. О новой константе в интуиционистской логике высказываний. ФПМ, т. 5 (1999), N 3, 903-926.

[Al+87] N. Alon , R.B. Boppana. The monotone circuit complexity of Boolean functions. Combinatorica v.7 (1987), 1-22.

[Ar99] M. Arató. In memory of Albert G. Dragalin (1941-1998). Publ. Math. Debrecen 55 (1999), No. 3-4, i-iv.

[B90] A. Berarducci. The interpretability logic of Peano arithmetic. JSL, v. 55 (1990), 1059-1089.

[G88] Yu. Gurevich. Kolmogorov machines and related issues. Bulletin of European Association for Theoretical Computer Science, N 35 (1988), 71-82.

[G01] Yu. Gurevich. Logician in the land of OS: Abstract state machines in Microsoft. http://research.microsoft.com/~gurevich

[L90] L. Lovàsz. The work of A. A. Razborov. Proc. of Int. Congress of Math, Kyoto, 1990. Springer-Verlag, 37-40.

[S98] S. Smale. Mathematical problems for the next century. Math. Intelligencer, 20 (2), 1998, 7-15.

[T88] E. Tardos. The gap between monotone and non-monotone circuit complexity is exponential. Combinatorica, v. 8 (1988), 141-142.