**Школа Молекулярной и Теоретической Биологии**

**II сезон**

**Пущино Август 2013 г.**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЭТЮДЫ для НЕМАТЕМАТИКОВ**

**Этюд 1.**

***РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ и ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОГРЕССИИ***

**М. А. Ройтберг.**

**Введение**

**[о чем стоило рассказать сначала]**

Конечные и бесконечные объекты в математике. Ахиллес и черепаха [Зенон Элеат, Антисфен Афинянин, Александр Эфиоп (он же А.С. Пушкин)]. Конечная геометрическая прогрессия со знаменателем ½. Ее сумма. Бесконечная геометрическая прогрессия. Что такое сумма бесконечного ряда чисел? Сумма бесконечной геометрической прогрессии.

Мы будем изучать бесконечные последовательности, уравнения, которые описывают такие последовательности, а также, как устроены множества решений таких уравнений.

**Занятие 1. 12 августа**

1. **Бесконечные последовательности и уравнения для них**
   1. Как задавать бесконечные последовательности?

Условия, описывающие числа (или конечные наборы чисел) – это уравнения. Например, условие *2x=6* описывает число *3* (говорят, что 3 – *решение* этого уравнения). Для бесконечной последовательности нужно бесконечное количество уравнений. Что делать?

Можно записывать бесконечную серию уравнений, как одно уравнение, в которое входит число *n* – номер члена последовательности. Пример:

*Xn = 2n-1 (А1)*

Подразумевается, что уравнение (1) выполнено **для всех *n = 1, 2, … .*** То есть (А1) – это **бесконечная** серия формул: *X1 = 21-1; X2 = 22-1; … X100 = 2100-1; …*

Такие уравнения называются *явными* (иногда говорят – *явная формула последовательности).*

Зная явную формулу, можно вычислить любой элемент последовательности.

Мы говорим, что **последовательность задана**, если мы знаем, **как вычислить любой ее элемент**.

* 1. Рекуррентные уравнения.

Другой способ задания последовательностей – *рекуррентные уравнения* они же – *рекуррентные формулы*).

*Рекуррентное уравнение* имеет вид

*Xn = …*

При этом в правой части уравнения присутствуют не только номер элемента *n* и числа, но и предыдущие члены неизвестной последовательности. Номера этих членов могут задаваться формулами относительно текущего номера *n*. Например,

*Xn = 2\*Xn-1 (А2)*

В рекуррентном уравнении (А2), в отличие от уравнения (А1), *n* не может быть любым числом: оно имеет смысл только при *n≥2,*  при *n=1* это уравнение не имеет смысла. Если задавать последовательность, например, уравнением (А2), нужно отдельно задать значение *X1* (говорят – задать *начальное* условие). Множество всех последовательностей, которые описываются рекуррентным уравнением при различных начальных условиях, называется *множеством решений* рекуррентного уравнения.

Рекуррентное уравнение (при известных начальных условиях) позволяет вычислить значение любого элемента последовательности. Но, в отличие от явной формулы, делать это приходится постепенно: чтобы вычислить, например, 100-й элемент последовательности, придется сначала вычислить предыдущие 99.

Поэтому часто стараются, имея рекуррентную формулу для элементов последовательности, найти и ее явную формулу.

* 1. Пример: геометрическая прогрессия.

*Геометрическая прогрессия* – это последовательность, которая удовлетворяет разностному уравнению 1-го порядка, то есть уравнению вида

*Xn = q\*Xn-1 (А3)*

Иными словами, геометрическая прогрессия – это такая последовательность, в которой каждый член (начиная со второго) получается из предыдущего умножением на одно и то же число *q.* Это число называется *знаменателем* прогрессии.

Утверждение. Геометрическая прогрессия { *Xn*} со знаменателем *q* имеет вид

{*c, cq, cq2, …, cqn-1, …* },

где *c = X1 –* число. То есть для элементов геометрической прогрессии, кроме рекуррентной формулы (А3), можно написать и явную формулу

*Xn = cqn-1(А4)*

Доказательство проводится методом *математической индукции.* Про него можно написать отдельно.

1. **Разностные уравнения**
   1. *Разностное (оно же – линейное рекуррентное) уравнение* 2-го порядка – это уравнение вида:

*Xn = a\*Xn-1 + b\*Xn-2*  (1)

где *a, b –* числовые коэффициенты.

Пример:

*Xn = 5\*Xn-1 - 6\*Xn-2*  (2)

Здесь *a = 5; b = -6.*

**«*Линейное»*** означает, что в правой части стоит сумма некоторого количества предыдущих членов, которые могут быть умножены на числовые коэффициенты – как в формулах (1) и (2).

*«2-го порядка»* означает, что в правой части встречается Xn-2, а Xn-3 и «более дальние» члены не встречаются.

*Решение* разностного уравнения – это бесконечная (!) последовательность *{Xn}* такая, что уравнение (1) выполнено для любых *n≥3.*

* 1. По любым значениям для *X1* и *X2*можно «вырастить» решение уравнения (1), причем ровно одно. Примеры «выращенных» решений уравнения (2) приведены в таблице 1 (см. также Урок1-2.xlsx, лист «Урок 1»).

Наблюдение 1. Если умножить все элементы решения на число, снова получим решение.

Доказательство. Пусть *{Rn}* – решение уравнения (1), то есть **для любого *n>2*** выполнено:

*Rn = a\*Rn-1 + b\*Rn-2*

Пусть **для любого *n***

*Qn = k\*Rn-1*

Тогда **для любого *n>2*** выполнено:

*a\*Qn-1 + b\*Qn-2 = a\*(k\*Rn-1) + b\*(k\*Rn-2) = k\*( a\*Rn-1 + b\*Rn-2) = k\* Rn = Qn*

что и требовалось доказать.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **N** | **Реш 1** | **Реш 2** | **Реш 3** | **Реш 4** | **Реш 5** | **Реш 6** | **Реш 7** | **Реш 8** |
| 1 | 0 | 2 | 1 | 0 | 3 | 5 | 3 | 20 |
| 2 | 0 | 5 | 2 | 1 | 9 | 10 | 6 | 50 |
| 3 | 0 | 13 | 4 | 5 | 27 | 20 | 12 | 130 |
| 4 | 0 | 35 | 8 | 19 | 81 | 40 | 24 | 350 |
| 5 | 0 | 97 | 16 | 65 | 243 | 80 | 48 | 970 |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … |
| **Формула n-го члена** | **0** | **???** | **2n-1** | **???** | **3n** | **5\*2n-1** | **3\*2n-1** | **10\*Реш2[n]** |

Таблица 1.

***Продолжение следует***

Упражнения.

1. Привести пример разностного уравнения 2-го порядка. Написать для него решения, которые начинаются с (в каждом случае написать 5 первых членов):

а) {0, 1}; б) {1, 0}; в) {1, 1}; г) {0, 0}

2. То же задание для своих начальных значений

3. Какие из следующих рекуррентных уравнений являются линейными? Определите порядок приведенных уравнений.

а) б) в) г)

**[**НЕ ДОПИСАНО**]**

**Занятие 2. 13 августа**

**3. Геометрические прогрессии**

3.1. Геометрические прогрессии – решения уравнения (2)

Геометрическая прогрессия – это последовательность, которая удовлетворяет разностному уравнению 1-го порядка, то есть уравнению вида

*Xn = q\*Xn-1*

Геометрическая прогрессия имеет вид {*c, cq, cq2, …, cqn-1, …* }, где *c, q –* числа. Число *q* называется *знаменателем* прогрессии.

У уравнения (2) нашлось два решения, которые являются геометрическими прогрессиями. Эти прогрессии имеют знаменатели 2 и 3. В силу Наблюдения 1, первый элемент прогрессий может быть любым. На прошлом занятии мы заметили, что решения уравнения (2), выращенные из {1, 2} и {3, 9} являются геометрическими прогрессиями (по крайней мере, в начале). Но мы не **доказывали,** что вся бесконечная последовательность, которая вырастает из этих начальных данных, будет геометрической прогрессией. Это можно доказать методом математической индукции.

Может быть, у уравнения (2) есть еще решения, которые являются геометрическими прогрессиями? Как искать такие решения у других разностных уравнений вида (1)?

3.2. Утверждение о геометрических прогрессиях и разностных уравнениях.

**Утверждение 1.** Пусть дано разностное уравнение

Xn = a•Xn-1 + b• Xn-2 (1)

Геометрическая прогрессия Xn = *с•qn-1* является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда q является корнем многочлена

*q2 - a•q - b*, (3)

то есть решением уравнения

*q2 – a•q - b = 0 (4)*

Этот многочлен называется *характеристическим многочленом* уравнения (1).

**Доказательство.**  Пусть последовательность { *с•qn-1*} является решением уравнения (1). Это означает, что для всех *n = 3, 4, …* выполнено:

*с•qn-1= a• с•qn-2 + b• с•qn-3*

Сократим на *с•qn-3.*  Получим:

*q2 = a•q + b*

откуда следует:

*q2 – a•q - b = 0*

Что и требовалось доказать.

**4. Как получать новые решения. Продолжение.**

**[игра с таблицей решений на доске]**

Продолжим то, что было в конце первого занятия – будем наблюдать решения, выращенные из различных начальных данных и искать связи между ними. См. таблицу 2 ((см. также Урок1-2.xlsx, лист «Урок 2»).

Можно заметить, что

[Реш 9] = [Реш 8] + [Реш 5]

[Реш 10] = (10/3)\*[Реш 5] + [Реш 3]

То есть, новые решения (иногда?) можно получать не только умножением известных решений на число, но и сложением решений.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **n** | **Реш 2** | **Реш 3** | **Реш 4** | **Реш 5** | **Реш 6** | **Реш 7** | **Реш 8** | **Реш 9** | **Реш 10** |
| 1 | 2 | 1 | 0 | 3 | 5 | 3 | 20 | 23 | 12 |
| 2 | 5 | 2 | 1 | 9 | 10 | 6 | 50 | 59 | 35 |
| 3 | 13 | 4 | 5 | 27 | 20 | 12 | 130 | 157 | 103 |
| 4 | 35 | 8 | 19 | 81 | 40 | 24 | 350 | 431 | 305 |
| 5 | 97 | 16 | 65 | 243 | 80 | 48 | 970 | 1213 | 907 |
| … | … | … | … | … | … | … | … | … | … |

Таблица 2

***Продолжение следует***

Упражнения (не давались, часть можно было сделать на занятии – если есть время ☺). В квадратных скобках – решения.

1. Дано разностное уравнение 2-го порядка. Найти все геометрические прогрессии, которые являются решениями этого уравнения. Ввиду утверждения 1, здесь «найти геометрическую прогрессию» означает «найти знаменатель геометрической прогрессии».

а) *Xn = 7\*Xn-1 - 10\*Xn-2;* [2, 5]

б) *Xn = 15\*Xn-1 - 50\*Xn-2;* [5, 10]

в) *Xn = 3\*Xn-1 + 10\*Xn-2;* [-2, 5]

г) *Xn = (9/2)\*Xn-1 –2\*Xn-2;* [4, 1/2]

д) *2\*Xn = 9\*Xn-1 –4\*Xn-2;* [4, 1/2]

е) *Xn = 3\*Xn-1 - 2\*Xn-2;* [2, 1]

ж) *Xn = Xn-1 + 2\*Xn-2;* [2, -1]

з) *Xn = -7\*Xn-1 - 10\*Xn-2;* [-2, -5]

и) *Xn = Xn-2 ;* [1, -1]

к) *Xn = 9\*Xn-2 ;* [3, -3]

л) *Xn = 6\*Xn-1 -9\* Xn-2 ;* [3]

м) *Xn = 6\*Xn-1 - 10\* Xn-2 ;* [прогрессий нет]

н) *Xn = - Xn-2 ;* [прогрессий нет]

\* есть решение *Xn = sin(n\*π/2)*

1. Придумать разностное уравнение 2-го порядка, у которого есть решения – геометрические прогрессии со знаменателями 4 и 5. Сколько есть таких решений?

**Занятие 3.**

**14 августа**

**5. Компьютерные эксперименты.**

Мы хотим понять, как ведут себя решения уравнения (2) и других уравнений вида (1) в зависимости от начальных условий. Для этого будем делать компьютерные эксперименты.

5.1. Инструментарий. Логарифмический масштаб.

См. Урок 3.xlsx, листы «Основная таблица» и «Пояснения».

Графики решений. Невозможность увидеть графики, кроме «самого большого» даже начальный фрагмент «самого большого» графика (лист Таб.3.1)..

Переход к «*логарифмическому масштабу»* по оси ординат, то есть построение графиков функции *log2f(x)* вместо графика функции *f(x).* График функции *y = c\*qn* – это прямая *y =*  *log2 c + (log2q)\*n,* см. лист Таб 3.2.

5.2. Общая схема экспериментов

Наблюдаем за графиками решений в уравнения (2) **в логарифмическом масштабе** **по оси ординат** (лист 3.2), то есть изображаем графики **логарифмов** (по основанию 2) **от функций.** Изображаем графики для геометрических прогрессий *G2* = {1, 2, …, 2n-1, …} и *G3* = {1, 3, …, 3n-1, …}, а также график еще одного решения *R.* Графики для решений *G2*  и *G3* – это прямые с уравнениями соответственно *y = n* и *y = (log23)\*n.* Прямые проходят через начало координат. Прямая для *G2* идет выше.

Следить сразу за двумя параметрами (то есть за значениями *X1* и *X2*) трудно. Будем следить за изменением *X2;* значение *X1* постоянно будет равным 1. Потом можно будет (если захотим) повторить то же для других значений *X1*.

**6. Графики решений разностных уравнений**

6.1. Решения с начальными значениями вида {1, t}, где t>>0.

Наблюдение: график для любого такого решения *R* «на бесконечности» – («на глаз») прямая, параллельная прямой для *G3*, то есть имеет уравнение *y = (log23)\*(n-1) +d.* В начале график «болтается», но довольно быстро выходит на прямую. Таким образом, значения *G3* при больших *n* (примерно: *n ≥10) приближенно* равны *k\*3n-1;* здесь  *k = 2d.*

Выясняем зависимость сдвига *d* от начального значения *R2 = t* – экспериментируем с разными значениями *t* (см. лист таб. 3.2). Выясняем, что *d* растет с ростом *t,* но растет медленно. Вопрос: как нужно изменить *t,* чтобы *d* увеличилось на 1? Наблюдение: *t* нужно увеличить в два раза.

Вспоминаем, что

*Rn* ≈ *2d\*3n-1 (3.1)*

Это значит, что при увеличении  *R2* в два раза, значение *Rn* при больших *n* тоже увеличивается в два раза.

НО! Мы уже знаем (см. занятие 1, Утверждение 1), что есть решение, **все элементы** которого больше элементов *Rn* в два раза. А у нас *R2* увеличился в два раза, а *R1* не изменился. Что это значит? Что равенство (3.1) приближенное. Видимо,

*Rn* = *k\*3n-1+ f(n)*

где значения *f(n)* с ростом *n* «играют все меньшую роль» по сравнению с *k\*3n-1.* Что значит «все меньшую роль» нужно уточнить.

6.2. Контроль наблюдений.

У нас в задаче были две «двойки» - основание логарифма и один из знаменателей. С какой из этих двоек связан эффект удвоения *t* для того, чтобы увеличить *d* на 1? Выполняем те же эксперименты для разностного уравнения *Xn = 15\*Xn-1 - 50\*Xn-2;* [решения 5, 10].

И еще раз – для других уравнений. Скажем, *Xn = 7\*Xn-1 - 10\*Xn-2;* [2, 5]

6.3. Новые вопросы. Планирование новых экспериментов.

1) Здесь – на примере уравнения *Xn = 7\*Xn-1 - 10\*Xn-2;* [2, 5]

Мы поняли, что при *t>5* прямая (в логарифмическом масштабе на «бесконечности») пойдет параллельно прямой для прогрессии G5 и выше ее. Что будет, если *t<5* ? Видимо, нужно отдельно рассмотреть случаи *2<t<5* (см. лист 3.3) и *t<2* (см. листы 3.4).

2\*) У нас есть известные решения для некоторых начальных условий. Будем как-то комбинировать начальные условия. Как будут зависеть новые решения от старых?

Знаем: если оба начальных значения умножить на одно и то же число, то все решение умножится на это число.

Гипотеза (см. таб.2): если сложить два набора начальных условий, то новое решение будет суммой решений. Проверим на экспериментах. Подтверждается!

Пора строить теорию.

***Продолжение следует***

**Занятие 4. 15 августа**

1. **Основные свойства решений**

**Теорема 1.**

Пусть {Pn} и {Qn} - решения уравнения (1).

Пусть α, β – числа.

Пусть {Sn} - последовательность.

Тогда:

А. Если **для любого *n*** выполнено:

*Sn =* α\**Pn*

то {Sn} - решение уравнения (1).

Б. Если **для любого *n*** выполнено:

*Sn = Pn + Qn*

то {Sn} - решение уравнения (1).

В. Если **для любого *n*** выполнено:

*Sn =* α\**Pn +* β\**Qn*

то {Sn} - решение уравнения (1).

**Теорема 2.**

Пусть {Pn} и {Qn} - решения уравнения (1).

Пусть α, β – числа

Пусть {Sn} - решение уравнения (1).

А. Если выполнено:

*S1 =* α\**P1* и *S2 =* α\**P2*

то **для любого *n*** выполнено:

*Sn =* α\**Pn*

Б. Если

*S1 = P1 + Q1* и *S1 = P2 + Q2*

то **для любого *n*** выполнено:

*Sn = Pn + Qn*

В. Если

*S1 =* α\**P1 +* β\**Q1* и *S1 =* α\**P2 +* β\**Q2*

то **для любого *n*** выполнено:

*Sn =* α\**Pn +* β\**Qn*

**Теорема 3.**

А. Пусть {Pn} и {Qn} - решения уравнения (1), такие что

*P1 = 1; P2 = 0;*

*Q1 = 0; Q2 = 1;*

Пусть {Sn} – произвольное решение уравнения (1).

Пусть α, β – числа, причем α = *S1*; β = *S2*.

Тогда **для любого *n*** выполнено:

*Sn =* α\**Pn +* β\**Qn*

Б. Пусть {Pn} и {Qn} - решения уравнения (1), такие что

*P1 = 1; P2 = p;*

*Q1 = 1; Q2 = q,*

где *p ≠q.*

Тогда найдутся такие числа α, β, что **для любого *n*** выполнено:

*Sn =* α\**Pn +* β\**Qn*

**4.2. Практика**

Кумир-программы (проверка теорем);

EXCEL: подбор коэф α и β для решений с начальными значениями {1, 0} и {0, 1}

**Занятие 5**

**17 августа**

**Общая формула для решения разностного уравнения 2-го порядка**

* 1. Через (1,0)-решение и (0,1)-решение
  2. Через геометрические прогрессии.

Решение системы линейных уравнений

2.3\* Объяснение компьютерных эксперментов.

**Занятие 6**

**18 августа**

Уравнение Фибоначчи и числа Фибоначчи.

**Занятие 7**

**19 августа**

(Полу)самостоятельная работа. Учимся задавать вопросы.

Разбор контрольного примера

Дано уравнение

Xn = (3/2)\*Xn-1 – (1/2)\*Xn-2 (3)

и начальные условия:

X1 = 10; X2 = 9

Найти X1000 с точностью до 0.001

**Занятие 8**

**20 августа**

Подведение итогов. Системы разностных уравнений.